

现代数学
专著系列

正算子理论

杨长森 左红亮 李海英 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

责任编辑 顾素萍

责任校对 刘欣

版式设计 詹锦玲

封面设计 罗 玘

ISBN 978-7-307-07205-3



9 787307 072053 >

定价: 26.00元

现代数学
专著系列

正算子理论

杨长森 左红亮 李海英 著

本书得到下列基金资助:

河南师范大学专著基金
河南省基础数学重点学科基金
河南省高校青年骨干教师资助计划
教育部科学技术研究重点项目基金
国家天元青年科学基金



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

正算子理论/杨长森,左红亮,李海英著. —武汉:武汉大学出版社,
2009. 8

现代数学专著系列

ISBN 978-7-307-07205-3

I. 正… II. ①杨… ②左… ③李… III. 正规算子 IV. O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 133371 号

责任编辑:顾素萍

责任校对:黄添生

版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:720×1000 1/16 印张:13 字数:215千字 插页:1

版次:2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷

ISBN 978-7-307-07205-3/O·406 定价:26.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

内 容 提 要

Hilbert 空间上正算子理论是线性代数中正定矩阵理论向无穷维情形的推广. 本书介绍利用算子极分解理论研究 Hilbert 空间上正算子的若干性质, 如不等式的保序性、算子函数的单调性和若干新的算子类等方面的知识和方法. 全书共分五章: 第一章介绍部分等距和极分解等预备知识. 第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式, 并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广. 第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性, 并研究 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间. 第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式等中的应用, 并研究若干算子保序不等式. 第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数研究 $F(p, r, q)$, $wF(p, r, q)$, $A(s, t)$ 等算子类, 指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等. 本书可作为基础数学专业泛函分析方向的研究生教材或参考书, 也可供有关专业的教师和科研工作者参考.

前 言

正定矩阵在矩阵理论中有着重要的地位, 正定矩阵向无穷维空间的推广就产生了正算子, 像正定矩阵一样正算子有着极其丰富的性质. 早在 1934 年, Löwner-Heinz 证明了如下著名的不等式: 若 $A \geq B \geq 0$, 则对任意实数 $\alpha \in [0, 1]$, 有 $A^\alpha \geq B^\alpha$. 到 1985 年, Chan-Kwong 在 [12] 中猜想 $A \geq B \geq 0$ 蕴含 $(AB^2A)^{\frac{1}{2}} \leq A^2$. T. Furuta 在 1987 年证明了这个猜想是正确的, 得到了一个比 Löwner-Heinz 不等式更广泛的不等式, 后来称之为 Furuta 不等式. 该不等式出现后, 引起许多学者的关注和研究. 例如 Furuta 等先后给出了该不等式的简化证明, 以及其所诱导的算子单调函数和它在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式、算子类等中的应用; K. Tanahashi 等研究了该不等式条件的最优性, 并研究了具有负指数的 Furuta 型不等式. 本书介绍这方面的基本理论和最近作者获得的一些结果, 鉴于篇幅有限, 有些结果没有列出.

全书共分五章. 第一章介绍部分等距和极分解等预备知识. 第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式, 并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广. 第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性, 并研究 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间. 第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式等中的应用, 并研究若干算子保序不等式. 第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数来研究 $F(p, r, q)$, $wF(p, r, q)$, $A(s, t)$ 等算子类, 指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等. 为了方便读者, 在附录中给出了常用的名词索引.

本书主要内容是由著者论文整理而成的, 著者感谢导师李国平院士, 是他引导著者对 Hilbert 空间上算子理论产生了浓厚的兴趣; 感谢日

本东京科技大学的 T. Furuta 教授，他给著者提供了许多资料，多年来他给予我们许多关怀和培养；最后感谢武汉大学刘培德教授的关心、鼓励与帮助，并推荐该书在武汉大学出版社出版。在本书的写作过程中，还得到许多研究生的帮助，在此也表示感谢。由于著者水平有限，难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正！

著 者

河南师范大学数学与信息科学学院

目 录

前言	i
第一章 预备知识	1
1.1 正常算子与自伴算子的简单性质	1
1.2 投影算子与正算子的平方根	5
1.3 部分等距与极分解	12
1.4 降幂引理及比较引理	17
1.5 几种特殊的算子类	19
第二章 几个重要的算子不等式	23
2.1 L-H 不等式及其等价命题	23
2.2 Furuta 不等式	28
2.3 具有负幂指数的 Furuta 型不等式	32
2.4 关于负幂的 Furuta 型不等式的推广	38
2.5 Kantorovich 不等式和 Hölder-McCarthy 不等式	47
第三章 Furuta 型不等式条件的最优性	55
3.1 L-H 不等式及 Furuta 不等式的最优性	55
3.2 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间	63
3.3 具有负指数 Furuta 型不等式外部指数的最优性	74
第四章 Furuta 不等式与 Furuta 型不等式的应用	77
4.1 Ando 定理	77
4.2 Furuta 不等式应用于 Ando 定理和算子的广义相对熵	81
4.3 Furuta 不等式应用于算子的保序不等式	89
4.4 Furuta 不等式应用于算子方程	100

4.5	与广义 Furuta 不等式相应的算子单调函数	105
4.6	Furuta 不等式在 Kantorovich 型不等式中的应用	110
4.7	Kantorovich 型不等式应用于算子混序的一个特征	116
第五章	Furuta 不等式应用于若干算子类	123
5.1	几个算子单调函数	123
5.2	$wF(p, r, q)$ 算子类	129
5.3	$F(p, r, q), wF(p, r, q)$ 算子类与其中参数的依赖性	152
5.4	$A(s, t)$ 类算子的谱性质	159
5.5	$wF(p, r, q)$ 类算子的谱性质	164
5.6	p - 亚正常算子及对数 - 亚正常算子的幂	171
索引	188
参考文献	191

第一章 预备知识

1.1 正常算子与自伴算子的简单性质

设 H 是 Hilbert 空间, $L(H)$ 是 H 上有界线性算子的全体构成的 Banach 代数. 以 $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$ 为 $T \in L(H)$ 的范数; 以 Φ 代表 H 所取的标量域, 即实数域与复数域; 以 $R(T), N(T)$ 分别代表 T 的值空间与零空间.

定义 1 设 $T \in L(H)$. 若存在 $B \in L(H)$ 使得

$$(Tx, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H,$$

则称 B 是 T 的共轭算子, 记为 T^* .

如果 $T^*T = TT^*$, 则称 T 是正常算子或正规算子. 特别地, 若 $T = T^*$, 则称 T 为自伴算子.

为了说明对任意的有界线性算子 T , 其共轭算子都是存在的, 我们要从 Riesz 表现定理谈起.

定理 1.1.1 (Riesz 表现定理) 设 H 是 Hilbert 空间.

(1) 对于每个 $y \in H$, $f(x) = (x, y)$ 是 H 上的连续线性泛函, 且

$$\|f\| = \|y\|.$$

(2) 若 f 是 H 上的连续线性泛函, 则存在 $y \in H$, 使得

$$f(x) = (x, y), \quad \forall x \in H,$$

此时称 y 为 f 的表现.

证 (1) 显见, f 是线性泛函且

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

故 f 有界且 $\|f\| \leq \|y\|$. 另一方面, 由 $f(y) = (y, y) = \|y\|^2$, 得

$$\|f\| \geq \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \|y\|.$$

从而必有 $\|f\| = \|y\|$.

(2) 如果 f 是 H 上的连续线性泛函, 令 $E = N(f)$, 则 E 闭. 若 $E = H$, 则 $f = 0$, 此时取 $y = 0$ 即可. 如果 $E \neq H$, $H = E \oplus E^\perp$, 先取 $z \in E^\perp$ 且 $\|z\| = 1$, 则 $f(z) \neq 0$. 令 $y = \overline{f(z)}z$, 对每个 $x \in H$, 显见 $x - \frac{f(x)}{f(z)}z \in E$, 故

$$0 = \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z, y \right) = (x, y) - \frac{f(x)}{f(z)}(z, \overline{f(z)}z) = (x, y) - f(x),$$

即 $\forall x \in H$, $f(x) = (x, y)$, 且由 (1) 知 $\|f\| = \|y\|$.

定义 2 若

$$S(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha}S(f_1) + \overline{\beta}S(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \alpha, \beta \in \Phi,$$

则称映射 $S: H^* \rightarrow H$ 是共轭线性的. 若 $T: H^* \rightarrow H$ ($Tf = y$), 其中 y 是 f 的表现, 由 Riesz 表现定理可知, T 是共轭线性满射, 且

$$\|Tf\| = \|f\|, \quad \forall f \in H^*.$$

定理 1.1.2 设 H 为 Hilbert 空间, 则对每个 $A \in L(H)$, 存在唯一的 $B \in L(H)$, 使得

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H.$$

证 对任意的 $x, y \in H$, 令 $\varphi(x, y) = (x, Ay)$. 固定 $x \in H$, 令

$$f_x(y) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

下证 f_x 是 H 上的有界线性泛函. 事实上, 对任意的 $z, y \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned} f_x(\alpha y + \beta z) &= \overline{\varphi(x, \alpha y + \beta z)} = \overline{(x, A(\alpha y + \beta z))} \\ &= \alpha f_x(y) + \beta f_x(z), \end{aligned}$$

且

$$|f_x(y)| = |\overline{\varphi(x, y)}| = |(x, Ay)| \leq \|A\| \|x\| \|y\|,$$

故 f_x 是 H 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表现定理可知, 存在唯一的 z_x 使得 $f_x(y) = (y, z_x)$. 设 $B: x \rightarrow z_x$, 则容易验证 B 是 $H \rightarrow H$ 上的线性算子, 并且对任意的 $x, y \in H$ 有

$$(Bx, y) = (z_x, y) = \overline{(y, z_x)} = \overline{f_x(y)} = \varphi(x, y) = (x, Ay),$$

且 B 是有界的. 事实上, 当 $Bx \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \|Bx\| &= \left(B\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{Bx}{\|Bx\|} \right) \|x\| = \left(\frac{x}{\|x\|}, A\left(\frac{Bx}{\|Bx\|}\right) \right) \|x\| \\ &\leq \|A\| \|x\|. \end{aligned}$$

因此, $\|B\| \leq \|A\| < \infty$.

注 若 $A \in L(H)$, 则 A 自伴当且仅当对任意的 $x, y \in H$, 有 $(Ax, y) = \overline{(Ay, x)}$; 当 Φ 为复数域时, A 自伴当且仅当对任意的 $x \in H$, 有 (Ax, x) 为实数.

定理 1.1.3 设 $A, B \in L(H)$, $\alpha, \beta \in \Phi$, 则

- (1) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$;
- (2) $(A^*)^* = A$;
- (3) $(AB)^* = B^* A^*$;
- (4) $\|A^*\|^2 = \|A\|^2 = \|A^* A\|$;
- (5) $N(A) = R(A^*)^\perp$;
- (6) $N(A^*) = R(A)^\perp$;
- (7) $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$;
- (8) $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$.

定理 1.1.4 设 $T \in L(H)$, 且 Φ 是复数域.

- (1) T 是正常的当且仅当 $\forall x \in H, \|Tx\| = \|T^*x\|$.
- (2) 若 T 是正常的, 则 $N(T) = N(T^*) = R(T)^\perp$.
- (3) 若 T 是正常的, $x \in H$ 是 T 的相应于 α 的特征向量, 则 $T^*x = \overline{\alpha}x$.
- (4) 若 T 是正常的, 则 T 的不同特征值的特征向量彼此正交.

证 (1) 若 T 是正常的, 即 $T^*T = TT^*$, 则

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2.$$

反之, 若 $\forall x \in H$, 有 $\|Tx\| = \|T^*x\|$, 则

$$((T^*T - TT^*)x, x) = 0.$$

因若 $S \in L(H)$ 且在复空间中 $\forall x \in H$, $(Sx, x) = 0$, 则必有 $S = 0$. 事实上, 由对任意的 $x, y \in H$ 有 $(S(x+y), x+y) = 0$, 故

$$(Sx, y) + (Sy, x) = 0 \quad \text{且} \quad (Sx, iy) + (S(iy), x) = 0,$$

因此 $(Sx, y) - (Sy, x) = 0$. 从而对任意的 $x, y \in H$ 有 $(Sx, y) = 0$, 故 $S = 0$. 从而 (1) 成立.

(2) 对任意的 $x \in N(T)$ 有 $Tx = 0$, 由 (1) 知, 当且仅当对任意的 $x \in H$, $T^*x = 0$, 故 $x \in N(T^*)$. 再由定理 1.1.3 知结论成立.

(3) 由 T 是正常的知 $T - \alpha I$ 也是正常的, 再由 (1) 知结论成立.

(4) 设 $Tx = \alpha x$, $Ty = \beta y$ 且 $\alpha \neq \beta$. 则由 (3) 可知 $T^*y = \bar{\beta}y$, 从而

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = (x, \bar{\beta}y) = \beta(x, y),$$

故 $x \perp y$.

对酉算子, 易证下面结果:

定理 1.1.5 设 H 是复 Hilbert 空间, $U \in L(H)$, 则下列条件等价:

- (1) U 是酉算子 (即 $UU^* = U^*U = I$);
- (2) U 是满射, 且对任意 $x, y \in H$ 有 $(Ux, Uy) = (x, y)$;
- (3) U 是满射, 且对任意 $x \in H$ 有 $\|Ux\| = \|x\|$.

证 只须证 (3) \Rightarrow (1). 由 $\|Ux\| = \|x\|$, 得

$$(U^*Ux, x) = (x, x),$$

故 $U^*U = I$. 再由 (3) 知, U 是可逆的, 从而 $U^* = U^{-1}$, 故 U 是酉算子.

定理 1.1.6 (Fuglede-Putnam-Rosenldum) 设 $M, N, T \in L(H)$, 且 M, N 都是正常的. 若 $MT = TN$, 则 $M^*T = TN^*$.

证 由 $MT = TN$, 则对任意自然数 $k \geq 0$, 有 $M^k T = TN^k$. 故若 $p(z)$ 是多项式, 则

$$p(M)T = Tp(N).$$

从而对任意固定的复数 z , 有 $e^{izM}T = Te^{izN}$, 即有 $T = e^{-izM}Te^{izN}$. 令

$$f(z) = e^{-izM^*}Te^{izN^*} = e^{-i(zM^* + \bar{z}M)}Te^{i(zN^* + \bar{z}N)},$$

易见, $e^{-i(zM^* + \bar{z}M)}$, $e^{i(zN^* + \bar{z}N)}$ 都是酉算子, 故 $\|f(z)\| \leq \|T\|$. 又 $f(z)$ 解析, 由刘维尔定理知 $f(z)$ 是常值函数. 从而

$$0 = f'(z) = -iM^*e^{-izM^*}Te^{izN^*} + ie^{-izM^*}Te^{izN^*}N^*.$$

令 $z = 0$, 得 $M^*T = TN^*$.

1.2 投影算子与正算子的平方根

假设 H 是复 Hilbert 空间. 若 $T \in L(H)$, 且 $T^2 = T$, 则称 T 是 **幂等算子**, 自伴的幂等算子称为 **投影算子**; 若 $\forall x \geq 0$, $(Tx, x) \geq 0$, 则称 T 是 **正算子**, 记为 $T \geq 0$. 若 T 是可逆的正算子, 则称 T 是 **严格正算子**, 记为 $T > 0$.

定理 1.2.1 若 $P \in L(H)$, 则下列条件等价:

- (1) P 是投影算子;
- (2) $P^2 = P$ 并且 P 是正常的;
- (3) $P^2 = P$ 并且 $R(P) = N(P)^\perp$;
- (4) $(Px, x) = \|Px\|^2$ ($\forall x \in H$).

证 (1) \Rightarrow (2) 显见.

(2) \Rightarrow (3) 由定理 1.1.4 知, 若 P 正常, 则 $N(P) = R(P)^\perp$. 又 $P^2 = P$, 故 $R(P) = N(I - P)$. 从而 $R(P)$ 是闭的, 且

$$R(P) = \overline{R(P)} = \left(\overline{R(P)}^\perp\right)^\perp = N(P)^\perp.$$

(3) \Rightarrow (4) 假设 $x \in H$. 令 $z = Px$, $y = x - Px$, 则 $Py = 0$, $Pz = z$, 故 $y \in N(P)$, $z \in R(P)$. 所以由 (3) 得 $y \perp z$, 从而有

$$(Px, x) = (z, z + y) = (z, y) + (z, z) = (z, z) = \|Px\|^2.$$

(4) \Rightarrow (1) 由 $\|Px\|^2$ 是实数, 故

$$(Px, x) = (x, P^*x) = \overline{(P^*x, x)} = (P^*x, x),$$

由 H 是复空间知 $P = P^* = P^2$; 又

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x),$$

故 $P^2 = P$.

定义 3 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$, 称

$$W(A) = \{(Ax, x) : \forall x \in H, \|x\| = 1\}$$

为 A 的数值值域; 称

$$\omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu|$$

为 A 的数值半径.

关于数值值域, 我们有下列著名的 Toeplitz-Hausdorff 定理.

定理 1.2.2 ^[59] 设 H 是 Hilbert 空间, $T \in L(H)$, 则 T 的数值值域 $W(T)$ 是复平面上的凸集.

证 对 H 中任意两个单位向量 x, y , 令 $\xi = (Tx, x)$, $\eta = (Ty, y)$; 现证对任意 $t \in [0, 1]$, 有 $t\xi + (1-t)\eta \in W(T)$. 不妨设 $\xi \neq \eta$, 记

$$\alpha = \frac{1}{\xi - \eta}, \quad \beta = \frac{-\eta}{\xi - \eta},$$

则只要证明 $[0, 1] \subseteq W(\alpha T + \beta)$. 事实上, 如果 $[0, 1] \subseteq W(\alpha T + \beta)$ 成立, 则对任意 $t \in [0, 1]$, 有 H 中的单位向量 z 使得 $t = \alpha(Tz, z) + \beta$, 从而

$$\begin{aligned} \alpha(Tz, z) + \beta &= t = t(\alpha\xi + \beta) + (1-t)(\alpha\eta + \beta) \\ &= \alpha[t\xi + (1-t)\eta] + \beta, \end{aligned}$$

故 $t\xi + (1-t)\eta = (Tz, z) \in W(T)$. 下面考虑 $\alpha T + \beta$ 的笛卡儿分解 $A + iB$, 其中 A, B 为自伴算子, 易证 $(Bx, x) = 0$, $(By, y) = 0$. 不妨设

(Bx, y) 是一个纯虚数, 必要时可将 x 乘以一个单位复数. 由 $\xi \neq \eta$ 知, 单位向量 x, y 必线性无关, 令 $h(t) = tx + (1-t)y$, 则 $h(t) \neq 0$. 由

$$(Bx, x) = (By, y) = \operatorname{Re}(Bx, y) = 0,$$

则对所有 $t \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned} & (Bh(t), h(t)) \\ &= t^2(Bx, x) + t(1-t) \left((Bx, y) + \overline{(Bx, y)} \right) + (1-t)^2(By, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

再由 A 自伴, 可知

$$f(t) = \left((\alpha T + \beta) \frac{h(t)}{\|h(t)\|}, \frac{h(t)}{\|h(t)\|} \right) \in W(\alpha T + \beta),$$

且它是 $[0, 1]$ 上的实值连续函数, 因 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 由介值定理可知 $[0, 1] \subseteq W(\alpha T + \beta)$.

定义 4 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$, 如果复数 λ 使得 $\lambda I - A$ 可逆, 则称 λ 是 A 的 **正则点**, A 的所有正则点组成的集合称为 A 的 **预解集**, 记为 $\rho(A)$; A 的非正则点, 称为 **谱点**, 所有谱点组成的集合称为 A 的 **谱集**, 记为 $\sigma(A)$.

定理 1.2.3 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$ 是自伴算子, 则

$$(1) \sigma(A) \subseteq \overline{W(A)} \quad (\overline{W(A)} \text{ 是 } W(A) \text{ 的闭包});$$

$$(2) \omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu| = \|A\|;$$

$$(3) r(A) = \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu| = \|A\|,$$

其中 $\omega(A)$ 称为 A 的 **数值半径**, $r(A)$ 称为 A 的 **谱半径**.

证 (1) 由 A 是自伴算子, 故 $W(A) \subseteq \mathbf{R}$. 若 $\lambda \notin \overline{W(A)}$, 设

$$d = \rho(\lambda, \overline{W(A)}) = \inf_{\mu \in W(A)} |\lambda - \mu| > 0.$$

则 $\forall x \in H, x \neq 0$, 有

$$\begin{aligned} d\|x\|^2 &\leq \left| \lambda - \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \right| \|x\|^2 = \left| ((\lambda I - A)x, x) \right| \\ &\leq \|(\lambda I - A)x\| \|x\|. \end{aligned}$$

故

$$d\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|. \quad (1.2.1)$$

若 $y_n \in R(\lambda I - A)$, 则 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $x_n \in H$. 如果 $\{y_n\}$ 是柯西列, 由 (1.2.1) 知 $\{x_n\}$ 也是, 故 x_n 收敛于某 x_0 于 H 中, 所以 $y_n \rightarrow (\lambda I - A)x_0$ 于 $R(\lambda I - A)$ 中. 因此 $R(\lambda I - A)$ 是闭的.

下面断言 $\lambda I - A$ 是到上的. 事实上, 如果它不是到上的, 由 Riesz 表现定理, 则存在 $y \in H, \|y\| = 1$ 使得

$$((\lambda I - A)x, y) = 0, \quad \forall x \in H.$$

特别地, 有 $((\lambda I - A)y, y) = 0$. 故

$$\lambda = \lambda \|y\|^2 = (Ay, y) \in W(A),$$

此与 $\lambda \notin \overline{W(A)}$ 矛盾. 从而 $\lambda I - A$ 是一一到上的, 由逆算子定理, $(\lambda I - A)^{-1} \in L(H)$, $\lambda \in \rho(A)$, 所以 $\lambda \notin \sigma(A)$.

(2) 对任意的 $\mu \in W(A)$, 存在 $\|x\| = 1$ 使得 $\mu = (Ax, x)$, 故

$$|\mu| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|.$$

从而

$$\omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu| \leq \|A\|.$$

反之, 记 $a = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu|$, 则 $|(Ax, x)| \leq a\|x\|^2$. 又

$$4\operatorname{Re}(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y),$$

故

$$|4\operatorname{Re}(Ax, y)| \leq a(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2a(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.2.2)$$

如果 $A = 0$, 结论显然成立. 如果 $A \neq 0$, 则存在 $x \in H, \|x\| = 1$ 使

$Ax \neq 0$. 令 $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$, 则

$$\|Ax\| = \left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|} \right) = \operatorname{Re}(Ax, y) \leq \frac{a}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) = a.$$

从而 $\|A\| \leq a = \omega(A)$. 因此 $\|A\| = \omega(A)$.

(3) 记 $M = \sup_{\mu \in W(A)} \mu$, $m = \inf_{\mu \in W(A)} \mu$, 则可断言 $M, m \in \sigma(A)$. 事实上, 设 $B = MI - A$, 则

$$B \geq 0, \quad \inf_{\|x\|=1} (Bx, x) = 0, \quad (1.2.3)$$

因此由 (1.2.3) 可断言 $M \in \sigma(A)$. 因为 (1.2.3) 可蕴含

$$(B(tBx + x), tBx + x) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

故对任意实数 t , $t^2(B^2x, Bx) + 2t\|Bx\|^2 + (Bx, x) \geq 0$. 因此

$$\|Bx\|^4 \leq \|B\|^3 \|x\|^2 |(Bx, x)|.$$

所以 (1.2.3) 可蕴含

$$\inf_{\|x\|=1} \|Bx\| = 0. \quad (1.2.4)$$

如果 B 是一一到上的, 那么 B^{-1} 有界. 由 $\|Bx\| \|B^{-1}\| \geq \|x\|$, 得

$$\inf_{\|x\|=1} \|Bx\| > 0,$$

此与 (1.2.4) 矛盾. 同理, 可知 $m \in \sigma(A)$. 再由 $W(A) \subseteq [m, M]$, 有

$$\omega(A) \leq \max\{|M|, |m|\} \leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu| = r(A),$$

且由 $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$ 可知, $r(A) \leq \omega(A)$, 因此 (3) 成立.

定理 1.2.4 假设 $A, B \in L(H)$, 则 $\sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}$.

证 假设 $\lambda \neq 0$, 我们证明 $AB - \lambda I$ 与 $BA - \lambda I$ 同时可逆或同时不可逆, 为此只需证明 $\lambda = 1$ 时的情况. 假若 $I - AB$ 可逆, 于是存在 $C \in L(H)$ 使得 $C(I - AB) = (I - AB)C = I$, 从而

$$\begin{aligned} (I + BCA)(I - BA) &= I - BA + BCA - BCABA \\ &= I + BCA - B(I + CAB)A \\ &= I + BCA - BCA = I. \end{aligned}$$

同理 $(I - BA)(I + BCA) = I$. 故 $I - BA$ 可逆.

注 一般情况下, 在无穷维空间中未必有 $\sigma(AB) = \sigma(BA)$, 譬如 l_2 上的右移算子 $A(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ 和其共轭算子就不具有这个性质. 当 A 正规时, 有 $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. 事实上, 当 AB 可逆时, 存在 X 使得 $ABX = XAB = I$, 故 A 满, A^* 单, 但 $N(A) = N(A^*)$, 从而 A 单, 故 A 可逆, 因此 BA 可逆; 反之亦然.

定理 1.2.5 设 H 是 Hilbert 空间, $T \in L(H)$, 则 $T \geq 0$ 当且仅当 $T = T^*$ 且 $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$.

证 若 $T \geq 0$, 则对任意的 $x \in H$ 有 $(Tx, x) \geq 0$, 故

$$(Tx, x) = \overline{(Tx, x)} = (T^*x, x).$$

因 H 是复空间, 所以 $T = T^*$, 且又 T 的数值值域包含在正半实轴中, 故由定理 1.2.2 知 $\sigma(T)$ 也在 $[0, \infty)$ 中.

若 $T = T^*$ 且 $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, 由 $T = T^*$, 知 (Tx, x) 是实数. 此时假设存在 $x_0 \in H$ 使得 $(Tx_0, x_0) < 0$, 记 $\alpha = \inf_{x \in H, \|x\|=1} (Tx, x)$, 则 $\alpha < 0$.

令 $B = T - \alpha I$, 则对任意的 $y \in H$, $\|y\| = 1$ 有

$$(By, y) = (Ty, y) - \alpha \geq 0,$$

即 $B \geq 0$. 又

$$\inf_{x \in H, \|x\|=1} (Bx, x) = \inf_{x \in H, \|x\|=1} ((Tx, x) - \alpha) = 0,$$

类似于 (1.2.3) 的证明可知 B 不是可逆的. 从而 $\alpha \in \sigma(T)$, 此与假设 $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$ 矛盾. 因此 $T \geq 0$.

定理 1.2.6 设 T 是自伴算子, $T \geq 0$, 则

- (1) $\forall S \in L(H)$, $S \geq 0$ 时, 有 $T + S \geq 0$;
- (2) $\forall \alpha \geq 0$, 有 $\alpha T \geq 0$;
- (3) 对任一自然数 n , 有 $T^n \geq 0$;
- (4) 存在唯一的 $S \geq 0$, $S \in L(H)$, 使得 $S^2 = T$, 且若 B 与 T 可换, 则 S 与 B 可换; 此时称 S 是 T 的平方根;
- (5) 若 $T' \geq 0$, $TT' = T'T$, 则 $TT' \geq 0$, 且去掉条件 $TT' = T'T$ 时, 结论未必成立.

证 (1),(2) 显见.

(3) 对 $x \in H$, 当 $n = 2k$ 为偶数时, 有

$$(T^n x, x) = (T^k x, T^k x) \geq 0;$$

当 $n = 2k + 1$ 为奇数时, 有

$$(T^n x, x) = (TT^k x, T^k x) \geq 0.$$

故 $T^n \geq 0$.

(4) 不妨设 $\|T\| \leq 1$, 则 $0 \leq I - T \leq I$. 令

$$A_1 = \frac{1}{2}(I - T), \quad A_n = \frac{1}{2}(I - T + A_{n-1}^2) \quad (n \geq 2).$$

由归纳法易见 $\|A_n\| \leq 1$, 且 A_n 都是 $I - T$ 的正系数多项式. 又 $I - T \geq 0$, 故 $A_n \geq 0$. 另一方面, 有 $A_n A_{n-1} = A_{n-1} A_n$,

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{2}(A_n^2 - A_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(A_n - A_{n-1})(A_n + A_{n-1}),$$

故由 A_n 及 $A_2 - A_1 = \frac{1}{2}A_1^2$ 都是 $I - T$ 的正系数多项式, 应用归纳法可知 $A_n - A_{n-1}$ 都是 $I - T$ 的正系数多项式, 故 $A_n \geq A_{n-1} \geq 0$. 从而 $\forall x \in H$, 数列 $(A_n x, x)$ 单调递增, 且

$$|(A_n x, x)| \leq \|x\|^2 \|A_n\| \leq \|x\|^2.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n x, x)$ 存在. 所以 $((A_n - A_m)x, x) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$. 当 $n \geq m$ 时, 应用定理 1.2.3 的证明可知

$$\|(A_n - A_m)x\|^4 \leq \|A_n - A_m\|^3 \|x\|^2 \left| ((A_n - A_m)x, x) \right|,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ 依范数拓扑意义下存在. 令 $S_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$. 由 $A_n \geq 0$, 知 $S_0 \geq 0$ 且 $\|S_0\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \leq 1$, 故 $0 \leq S_0 \leq I$, 且由

$$A_n = \frac{1}{2}(I - T + A_{n-1}^2),$$

两边令 $n \rightarrow \infty$, 得 $S_0 = \frac{1}{2}(I - T + S_0^2)$. 所以

$$(S_0 - I)^2 = T.$$

记 $S = I - S_0$, 即有 $S^2 = T$. 若 $BT = TB$, 则 $BA_n = A_nB$, 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $BS = SB$.

下面证明唯一性. 如果另有 $S_1 \geq 0$, 使 $S_1^2 = T$, 因 S_1^2 与 T 可换从而 S_1^2 与 S 可换, 进而 S_1 与 S 可换. $\forall x \in H$, 令 $y = (S_1 - S)x$, 则

$$0 = ((S_1^2 - S^2)x, y) = ((S_1 + S)y, y) \geq 0.$$

故 $(S_1y, y) = (Sy, y) = 0$. 又 $S_1 \geq 0, S \geq 0$, 知 $S_1^{\frac{1}{2}}y = 0, S^{\frac{1}{2}}y = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= (y, y) = (S_1x, y) - (Sx, y) \\ &= (S_1^{\frac{1}{2}}x, S_1^{\frac{1}{2}}y) - (S^{\frac{1}{2}}x, S^{\frac{1}{2}}y) = 0, \end{aligned}$$

所以 $y = 0$ 即 $S_1 = S$.

(5) 设 $T = S^2$, 则 $ST' = T'S$. 从而

$$(TT'x, x) = (ST'x, Sx) = (T'Sx, Sx) \geq 0.$$

注 去掉条件 $TT' = T'T$ 时, 结论未必成立. 例如 $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $T' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $TT' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 不是正算子.

1.3 部分等距与极分解

设 H_1, H_2 是复 Hilbert 空间, $U \in L(H_1, H_2)$. 如果对任意的 $f \in H_1$ 有 $\|Uf\| = \|f\|$, 则称为一个 **等距**; 易见对线性变换 U 为等距当且仅当 $U^*U = I$.

定义 5 设 U 是一个 $H_1 \rightarrow H_2$ 的线性算子. 若对任意的 $f \in N(U)^\perp$ 有 $\|Uf\| = \|f\|$, 则称 U 是 **部分等距**.

显见, 自伴投影算子是一个部分等距; 当 $U \neq 0$ 且 U 为部分等距时, 有 $\|U\| = 1$. 我们称 $N(U)^\perp$ 为部分等距 U 的 **初始空间**. 我们知道, 当 U 是部分等距时, 必有

$$N(U)^\perp = \{f \in H_1 : \|Uf\| = \|f\|\}.$$

事实上, 若 $f \in H_1$, $\|Uf\| = \|f\|$, 记 $f = g + h$, 其中 $g \in N(U)$, $h \perp N(U)$, 则 $h \in N(U)^\perp$, 且由部分等距的定义有

$$\|f\| = \|Uf\| = \|Ug + Uh\| = \|Uh\| = \|h\|.$$

又 $\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$, 故 $g = 0$, 即 $f \in N(U)^\perp$, 反之显见. 对一个部分等距 U 称其值域 $R(U)$ 为 U 的终空间.

定理 1.3.1 一个有界线性算子 U 是一个部分等距当且仅当 U^*U 是一个到 U 的始空间 $N(U)^\perp$ 上的正交投影.

证 设 H, K 是复 Hilbert 空间, $U: H \rightarrow K$ 是一个部分等距且始空间为 $M = N(U)^\perp$. 令 $E: H \rightarrow M$ 为 H 到 M 上的正交投影. 当 $f \in M$ 时, 有 $Ef = f$, 故

$$(U^*Uf, f) = \|Uf\|^2 = \|f\|^2 = (Ef, f).$$

当 $f \in M^\perp$ 时, 则

$$(U^*Uf, f) = 0 = (Ef, f).$$

故 $\forall f \in H$, 都有 $(U^*Uf, f) = (Ef, f)$. 从而 $U^*U = E$.

反之, 设 U 是一个 H 到 K 内的有界线性算子, 使得 U^*U 是 H 到某子空间 M 上的正交投影 E , 故对 H 中任意的 f , 有

$$\|Uf\|^2 = (U^*Uf, f) = (Ef, f) = (Ef, Ef) = \|Ef\|^2.$$

从而 $f \in N(U)$ 当且仅当 $Ef = 0$, 当且仅当 $f \in M^\perp$, 即 $N(U) = M^\perp$; 当 $f \in M$ 时, $\|Uf\| = \|f\|$. 故 U 是以 M 为始空间的部分等距.

推论 1.3.1 (1) U 是部分等距, 则 U 的始空间是 U^*U 的值域.

(2) 部分等距算子的伴随算子也是部分等距, 且其一的始空间为另一个的终空间.

(3) 一个有界线性算子 U 是部分等距当且仅当 $U = UU^*U$.

证 (1) 由 U 的始空间为 $N(U)^\perp$, 故由定理 1.1.3 有

$$N(U)^\perp = N(U^*U)^\perp = R(U^*U).$$

(2) 若 U^*U 为投影, 故 $U^*U = (U^*U)^2$, 从而

$$(UU^*)^2 = UU^*UU^* = U(U^*U)^2U^* = (UU^*)^3.$$

故

$$(UU^*)^4 = (UU^*)^3 = (UU^*)^2.$$

两边开方得 $UU^* = (UU^*)^2$, 故由定理 1.3.1 知 U^* 为部分等距, 且

$$N(UU^*)^\perp = N(U^*)^\perp = \overline{R(U)}.$$

下证 $R(U)$ 是闭的. 事实上, 若 $Uf_n \rightarrow g$, $f_n \in N(U)^\perp$, 则

$$\|f_n - f_m\| = \|U(f_n - f_m)\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

故存在 f_0 使 $f_n \rightarrow f_0$, $g = Uf_0 \in R(U)$, 即 $R(U)$ 闭. 从而 U^* 的始空间为 U 的值域.

(3) 若 U 是部分等距, 则 U^*U 为投影, 其值域为 U 的始空间 $N(U)^\perp$, 故 $U(U^*U) = U$ 于 $N(U)^\perp$. 另一方面, 显然有 $U(U^*U) = U$ 于 $N(U)$ 上. 故 $UU^*U = U$. 反之, 若 $UU^*U = U$, 则 $(U^*U)^2 = U^*U$, 故 U^*U 为投影.

综合上述, 易得

推论 1.3.2 设 U 是 H 上一个有界线性算子, 则下列条件等价:

- (1) U 是部分等距;
- (2) U^* 是部分等距;
- (3) $U = UU^*U$;
- (4) $U^* = U^*UU^*$;
- (5) U^*U 是一个正交投影;
- (6) UU^* 是一个正交投影.

定理 1.3.2 (极分解定理) 若 $A: H \rightarrow K$ 是有界线性算子, 则存在部分等距 $U: H \rightarrow K$ 及一个正算子 P 使 $A = UP$, 且可使 $N(U) = N(P)$, 并且在 $N(U) = N(P)$ 条件下, U, P 是唯一的. 此时称 $A = UP$ 为 A 的 (右)极分解.

证 由 A^*A 是 H 上的正算子, 故有唯一的正的平方根 P . 又对任意的 $f \in H$, 有

$$\|Pf\|^2 = (Pf, Pf) = (P^2f, f) = (A^*Af, f) = \|Af\|^2.$$

故方程 $UPf = Af$ 就定义了一个线性算子 $U: R(P) \rightarrow K$, 且 U 是 $R(P)$ 上的等距. 因 U 在 $R(P)$ 上有界, 从而它在 $\overline{R(P)}$ 上有唯一的有界延拓, 进而可延拓成 H 到 K 的以 $\overline{R(P)}$ 为始空间的部分等距, 仍记为 U . 由 U 的定义, 显见有 $A = UP$, 且由 P 自伴有

$$N(U) = \overline{R(P)}^\perp = N(P).$$

下证唯一性. 设 $A = UP$, U 为部分等距, $P \geq 0$, 且 $N(U) = N(P)$, 故由定理 1.3.1 有

$$A^*A = PU^*UP = PEP,$$

其中 E 是 H 到 U 的始空间 $N(U)^\perp$ 的投影. 但

$$N(U)^\perp = N(P)^\perp = \overline{R(P)},$$

故 $EP = P$, 从而 $A^*A = P^2$, 由正算子平方根的唯一性知, P 是唯一的. 再由方程 $UPf = Af$ 唯一地确定了 U 在 $R(P)$ 上的值, 而 U 在 $N(P)$ 上的值为 0 (因 $N(U) = N(P)$), 所以 U 也是有上述条件唯一确定的.

推论 1.3.3 若 $A: H \rightarrow K$ 是有界线性算子, 且 $A = UP$ 是 A 的极分解, 则 $U^*A = P$.

推论 1.3.4 设 T 是 H 上一个有界线性算子, 且 $T = U|T|$ 是 T 的极分解, 其中 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, 则 U 的始空间 M 和终空间 N 分别为

$$M = \overline{R(|T|)} = \overline{R(T^*)}, \quad N = \overline{R(T)}.$$

此外还有 $U^*U|T| = |T|$, 并且 U 是酉算子的充分必要条件是 $M = N = H$.

证 由定理 1.3.2, 知 $N = \overline{R(T)}$, 且 $N(U) = N(|T|)$, 故

$$M = N(U)^\perp = N(|T|)^\perp = \overline{R(|T|)}.$$

又由 U^*U 是到 $\overline{R(|T|)}$ 上的投影, 故有 $U^*U|T| = |T|$. 从而, $U^*T = U^*U|T| = |T|$, 及 $|T| = |T|^* = T^*U$ 成立. 再由 $T^* = |T|U^*$, 有

$$\overline{R(|T|)} = \overline{R(T^*)}.$$

定理 1.3.3 设 H 是复 Hilbert 空间, $T \in L(H)$.

(1) 若 T 可逆, 则 T 有唯一的极分解 UP , 其中 U 是酉算子, $P > 0$.

(2) 若 T 是正常的, 则 T 有极分解 UP , 其中 $UP = PU$, 且 U, P 亦与 T 可换.

证 (1) 由 T 可逆知 T^*T 可逆, 从而 $P = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 可逆. 又 $N(U) = N(P) = \{0\}$, 知 U 可逆.

(2) 设 T 有极分解 UP , 且 $T^*T = TT^*$, 故 $UP^2U^* = PU^*UP = P^2$, 进而,

$$U^*P^2 = U^*UP^2U^* = P^2U^*,$$

从而 U 与 P^2 可换, 那么 U 必与 P 可换. 最后,

$$TU = UPU = U^2P = UT, \quad TP = UP^2 = PUP = PT.$$

定理 1.3.4 设 H 是复 Hilbert 空间, $T \in L(H)$, 且 $T = U|T|$ 是 T 的极分解, 则

- (1) 对每个正数 q , 有 $|T^*|^q = U|T|^qU^*$, $|T|^q = U^*|T^*|^qU$;
 (2) $T^* = U^*|T^*|$ 是 T^* 的极分解.

证 (1) 由于 $N(|T|^q) = N(|T|)$, 故 $U^*U|T|^q = |T|^q$. 由此可得

$$|T^*|^2 = TT^* = U|T|^2U^* = U|T|U^*U|T|U^* = (U|T|U^*)^2,$$

且 $(U|T|U^*)^k = U|T|^kU^*$. 所以, 对一切多项式 $f_n(t)$, 有

$$f_n(|T^*|^2) = f_n((U|T|U^*)^2) = Uf_n(|T|^2)U^*.$$

取 $f_n(t)$ 在 $[0, \infty)$ 的某一有穷子区间上一致收敛于函数 $t^{\frac{q}{2}}$, 则

$$|T^*|^q = U|T|^qU^*.$$

(2) 由 (1) 可知,

$$T^* = |T|U^* = U^*U|T|U^* = U^*|T^*|.$$

另一方面, 由 $T^* = |T|U^*$, $N(U) = N(|T|)$, 可证

$$N(U^*) = N(|T^*|).$$

事实上, 由 $\|Tx\|^2 = \| |T|x \|^2$ 我们有

$$\begin{aligned} U^*x = 0 &\Leftrightarrow UU^*x = 0 \Leftrightarrow |T|U^*x = 0 \\ &\Leftrightarrow T^*x = 0 \Leftrightarrow |T^*|x = 0. \end{aligned}$$

定理 1.3.5 设 H 是复 Hilbert 空间, $T \in L(H)$ 是正常算子, 则存在酉算子 U 使得 $T = U|T| = |T|U$, 并且对任意与 T, T^* 都可换的算子 $A = V|A|$ (极分解), U 与 A, V^*, V 都可换. 特别地, 如果 T 自伴, 则上述酉算子 U 还可使得 $U^* = U$.

证 设 T 有极分解 $T = U_1|T|$, 则 $U_1T = TU_1$, 且有 $U_1^*T = |T| = |T^*| = U_1|T|U_1^* = TU_1^*$, 故

$$(U_1^*U_1 - U_1U_1^*)|T| = U_1^*U_1|T| - U_1|T|U_1^* = 0.$$

另一方面, 当 $x \in N(|T|)$ 时, 有 $U_1x = 0$, $|T|U_1^*x = U_1^*|T|x = 0$, 因此 $U_1U_1^*x = 0$, 从而有 $U_1^*U_1 = U_1U_1^*$. 令

$$U = U_1U_1^*U_1 + I - U_1^*U_1,$$

可证 $U^*U = UU^* = I$, 且 $T = U|T|$. 再由 $|T|$ 与 V^*, V 及 $|A|$ 可换, 则 $U_1^*U_1$ 也与 V^*, V 及 $|A|$ 可换, 从而可验证

$$VU = UV, \quad V^*U = UV^*, \quad |A|U = U|A|.$$

1.4 降幂引理及比较引理

设 H 是 Hilbert 空间, A, B 是 H 上的有界线性算子. 若 $A > 0$, B 可逆, 则有下列降幂引理.

引理 1.4.1 ^[43] 若 $A > 0$, B 可逆, 则对任意实数 s 有

$$(BAB^*)^s = BA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{s-1}A^{\frac{1}{2}}B^*.$$

证 设 $BA^{\frac{1}{2}} = UP$ 是可逆算子 $BA^{\frac{1}{2}}$ 的极分解, 其中 U 为酉算

子, 则 $P = |BA^{\frac{1}{2}}| = (A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$, 于是

$$\begin{aligned}(BAB^*)^s &= (UP^2U^*)^s = UP^{2s}U^* = BA^{\frac{1}{2}}P^{-1}P^{2s}P^{-1}A^{\frac{1}{2}}B^* \\ &= BA^{\frac{1}{2}}(P^2)^{s-1}A^{\frac{1}{2}}B^* = BA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{s-1}A^{\frac{1}{2}}B^*.\end{aligned}$$

注 当 $s \geq 1$ 时, 引理 1.4.1 中的可逆的条件可以去掉.

作为引理 1.4.1 的一个应用, 我们有下列比较引理:

引理 1.4.2 ^[48] 令 $A > 0$, $B > 0$, 而且 $\beta, r, \alpha_1, \alpha_2$ 是满足下列条件的任意实数: $\alpha_1 + r \neq 0$, $\alpha_2 + r \neq 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\begin{aligned}&\left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \\ &\geq \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.\end{aligned}$$

证 由引理 1.4.1 我们可得

$$\begin{aligned}&\left(B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \\ &= B^{\frac{r}{2}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\left(A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^rA_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} - 1 A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\left[A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}}\right]^{1-\frac{\beta}{\alpha_1+r}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{-\alpha_1}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right. \\ &\quad \cdot \left.\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right. \\ &\quad \cdot \left.\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}},\end{aligned}$$

以及

$$\left(B_2^r A_2^{\alpha_2} B_2^r\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}} = B_2^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}} - 1 A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B_2^r,$$

故引理 1.4.2 得证.

1.5 几种特殊的算子类

我们先从算子的数值半径开始介绍.

定理 1.5.1 设 H 是 Hilbert 空间, T 是 H 上的有界线性算子, 则

$$(1) \quad \frac{1}{2}\|T\| \leq \omega(T) \leq \|T\|;$$

$$(2) \quad \operatorname{co} \sigma(T) \subseteq \overline{W(T)};$$

$$(3) \quad r(T) \leq \omega(T) \leq \|T\|;$$

$$(4) \quad \frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} \leq \|(T - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\mu, \overline{W(T)})}, \quad \text{其中在第一个不}$$

等式中 $\mu \notin \sigma(T)$, 在第二个不等式中 $\mu \notin \overline{W(T)}$;

$$(5) \quad \omega(T^n) \leq \omega(T)^n.$$

证 (1) 利用极化恒等式

$$\begin{aligned} (Tx, y) &= \frac{1}{4} \left[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) \right. \\ &\quad \left. + i(T(x+iy), x+iy) - i(T(x-iy), x-iy) \right], \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} |(Tx, y)| &\leq \frac{1}{4} \omega(T) \{ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2 \} \\ &= \omega(T) (\|x\|^2 + \|y\|^2), \end{aligned}$$

故 (1) 成立.

(2) 如果 $\mu \notin \overline{W(T)}$, 则对 H 中任意单位向量 x , 有

$$0 < d = d(\mu, \overline{W(T)}) \leq |(Tx, x) - \mu| \leq \|Tx - \mu x\|.$$

从而对任意向量 y 有

$$\|(T - \mu I)y\| \geq d\|y\|. \quad (1.5.1)$$

故 $T - \mu I$ 是一一的, 并且值域是闭的. 如果值域不满, 则 $N((T - \mu I)^*) \neq 0$, 此时必有单位向量 x 使得 $T^*x = \bar{\mu}x$, 故 $\mu \in W(T)$, 矛盾. 因此, $\mu \notin \sigma(T)$. 故 $\text{co } \sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

(3) 由 (2) 可得.

(4) 第二个不等式由 (1.5.1) 可知. 第一个不等式由谱映照定理可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} &= \sup\{|z - \mu|^{-1} : z \in \sigma(T)\} \\ &= \sup\{|z| : z \in \sigma((T - \mu)^{-1})\} \\ &\leq \|(T - \mu)^{-1}\|. \end{aligned}$$

(5) 由齐性, 只需证明当 $\omega(T) \leq 1$ 时, 有 $\omega(T^n) \leq 1$. 而这又只需证明对单位圆内的一切复数 z 有

$$\text{Re}((I - z^n T^n)^{-1}x, x) \geq 0.$$

显见当 $I - zT$ 可逆时, $\text{Re}((I - zT)x, x) \geq 0$ 对一切 $x \in H$ 成立当且仅当 $\text{Re}((I - zT)^{-1}y, y) \geq 0$ 对一切 $y \in H$ 成立. 再借助于下面的恒等式:

$$\begin{aligned} (I - z^n T^n)^{-1} &= \frac{1}{n} \left[(I - zT)^{-1} + (I - \omega zT)^{-1} + \cdots + (I - \omega^{n-1} zT)^{-1} \right], \end{aligned}$$

其中 ω 是 1 的本原 n 次根. 则由上式有 $\text{Re}((I - z^n T^n)^{-1}x, x) \geq 0$, 从而 $\text{Re}((I - z^n T^n)x, x) \geq 0$. 故 $\omega(T^n) \leq 1$.

定义 6 若 $\|T\| = r(T)$, 则称算子 T 是似正常的; 若 $\omega(T) = r(T)$, 则称算子 T 是似谱的; 若对 H 中的任意单位向量 x , 有

$$\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2,$$

则称算子 T 是仿正常的; 若存在 Hilbert 空间 $K \supseteq H$ 及 K 上的正常算子 N , 使得对任意 $x \in H$, $Tx = Nx$, 则称算子 T 是次正常的; 若

$$T^*T^2 = TT^*T,$$

则称算子 T 是拟正常的; 若 $\overline{W(T)} = \text{co } \sigma(T)$, 则称算子 T 是似凸的; 若 $TT^* \leq T^*T$, 则称算子 T 是亚正常的.

关于这些算子类, 有以下包含关系:

定理 1.5.2 下列包含关系成立:

$$\begin{aligned} \text{自伴算子类} &\subseteq \text{正常算子类} \subseteq \text{拟正常算子类} \subseteq \text{次正常算子类} \\ &\subseteq \text{亚正常算子类} \subseteq \text{仿正常算子类} \\ &\subseteq \text{似正常算子类} \subseteq \text{似谱算子类}. \end{aligned}$$

证 (1) 亚正常算子类 \subseteq 仿正常算子类

若 T 是亚正常算子, 则对 H 中的每个向量 x , 有 $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$, 故 $\|T^*Tx\| \leq \|T^2x\|$, 从而

$$\|Tx\|^2 = (T^*Tx, x) \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^2x\| \|x\|.$$

故 T 是仿正常算子.

(2) 仿正常算子类 \subseteq 似正常算子类

若 T 是仿正常算子, 则

$$\frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad \forall x \in H, Tx \neq 0.$$

故

$$\frac{\|T^n x\|}{\|Tx\|} \geq \frac{\|T^n x\|}{\|T^{n-1}x\|} \frac{\|T^{n-1}x\|}{\|T^{n-2}x\|} \cdots \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right)^{n-1}$$

易见 $\|T^n\| \geq \|T\|^n$, 故 $\|T^n\| = \|T\|^n$. 因此 $r(T) = \|T\|$.

(3) 似正常算子类 \subseteq 似谱算子类

由定理 1.5.1 (3) 可得.

(4) 次正常算子类 \subseteq 亚正常算子类

若 T 是次正常算子, T 的正规延拓在某个 Hilbert 空间 $K \supseteq H$ 上可表示为

$$N = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

由 $N^*N = NN^*$, 可得 $T^*T = TT^* + XX^* \geq TT^*$.

(5) 拟正常算子类 \subseteq 次正常算子类

若 T 是拟正常算子, $T = U|T|$ 是它的极分解, 则有 $U|T| = |T|U$, 从而

$$T^*T - TT^* = |T|^2 - U|T||T|U^* = |T|(I - UU^*)|T| \geq 0,$$

故 T 是亚正常的. 定义 $[T] = T^*T - TT^*$, 易证 $[T] \geq 0$, $[T]T = 0$, 从而对一切自然数 n , $[T]^n T = T^*[T]^n = 0$. 不难看出 $[T]$ 的平方根 S 也有 $ST = T^*S$. 令

$$N = \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & T^* \end{pmatrix},$$

则容易验证 N 是 T 的正规延拓.

第二章 几个重要的算子不等式

2.1 L-H 不等式及其等价命题

引理 2.1.1 设 $0 \leq A \leq B$, 则 $A^{\frac{1}{2}} \leq B^{\frac{1}{2}}$.

证 不妨设 $B > 0$, 因一般情形可考虑用 $B + \varepsilon I$ 代替 B , 然后再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即可. 显然由假设有 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \leq I$, 故 $\|B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\| \leq 1$. 又

$$\|B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\| = \|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})^*\| = \|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\|^2,$$

因此 $\|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\| \leq 1$. 由于 $B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}$ 是自伴算子, 故

$$\begin{aligned}\|B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}\|^2 &= \|B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}\| = r_{B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}} = r_{B^{-\frac{1}{4}}B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\| \leq 1.\end{aligned}$$

从而

$$0 \leq B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}} \leq \|B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}\|I \leq I,$$

即 $A^{\frac{1}{2}} \leq B^{\frac{1}{2}}$.

定理 2.1.1 (L-H 不等式) 设 $0 \leq A \leq B$, 则对一切 $\alpha \in [0, 1]$, 有 $A^\alpha \leq B^\alpha$.

证 不妨设 $0 < A \leq B$, 由引理 2.1.1 得

$$B^{\frac{3}{4}}A^{-1}B^{\frac{3}{4}} \geq B^{\frac{1}{2}} \geq A^{\frac{1}{2}}.$$

从而

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{4}}A^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \geq A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}} = \left(A^{-\frac{1}{4}}\right)^2,$$

于是再由引理 2.1.1 得 $A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{4}}A^{-\frac{1}{2}} \geq A^{-\frac{1}{4}}$, 即 $B^{\frac{3}{4}} \geq A^{\frac{3}{4}}$.

下面用数学归纳法来证对一切自然数 k 及 $m = 1, 2, \dots, 2^k$ 有

$$B^{\frac{m}{2^k}} \geq A^{\frac{m}{2^k}}.$$

事实上, $k = 1$ 时显然成立, 假若 $k = n - 1$ 时成立. 首先对 $m = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n$, 由归纳假设知

$$B^{\frac{m}{2^n}}A^{-1}B^{\frac{m}{2^n}} \geq B^{\frac{m}{2^{n-1}}-1} \geq A^{\frac{m}{2^{n-1}}-1},$$

故

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-1}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-\frac{1}{2}} \geq \left(A^{\frac{m}{2^n}-1}\right)^2.$$

由引理 2.1.1 得

$$A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-\frac{1}{2}} \geq A^{\frac{m}{2^n}-1},$$

即 $B^{\frac{m}{2^n}} \geq A^{\frac{m}{2^n}}$.

其次, 如果 $1 \leq m \leq 2^{n-1}$, 由归纳假设知 $B^{\frac{m}{2^{n-1}}} \geq A^{\frac{m}{2^{n-1}}}$, 应用引理 2.1.1 也有 $B^{\frac{m}{2^n}} \geq A^{\frac{m}{2^n}}$. 由于 $\left\{\frac{m}{2^n} : m = 1, 2, \dots, 2^n, n \geq 0\right\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密, 对每个固定的 $s \in [0, 1]$, 我们可证当数列 p_n 收敛于 s 时, 必有 A^{p_n} 收敛于 A^s . 事实上, 只需证明若 $0 < m \leq M < \infty$, 当 $t_n \rightarrow s$ 时, 函数列 $f_n(x) = x^{t_n}$ 在 $[m, M]$ 上一致收敛即可. 现对函数 $f(s) = x^s$ 应用微分中值定理, 易知存在常数 Q 使得

$$|x^{t_n} - x^s| \leq Q |t_n - s|, \quad \forall x \in [m, M],$$

故结论成立.

定理 2.1.2 (Heinz-Kato)^{[21], [70]} 设 $A > 0, B > 0, Q \in L(H)$, 且 $Q^*Q \leq A^2, QQ^* \leq B^2$, 则

$$|(Qx, y)| \leq \|A^s x\| \|B^{1-s} y\|, \quad \forall x, y \in H, 0 \leq s \leq 1.$$

证 我们由 L-H 不等式来证明定理 2.1.2.

设 $Q = UP$ 是 Q 的极分解, 记 $t = 1 - s$. 由 $Q^*Q \leq A^2$, $QQ^* \leq B^2$, 得

$$P^2 \leq A^2, \quad UP^2U^* \leq B^2.$$

应用 L-H 不等式可知 $P^{2s} \leq A^{2s}$, 且

$$UP^{2t}U^* = (UP^2U^*)^t \leq B^{2t},$$

故

$$\begin{aligned} |(Qx, y)|^2 &= |(UPx, y)|^2 = |(P^s x, P^t U^* y)|^2 \\ &\leq \|P^s x\|^2 \|P^t U^* y\|^2 = (P^{2s} x, x) (UP^{2t} U^* y, y) \\ &\leq (A^{2s} x, x) (B^{2t} y, y) = \|A^s x\|^2 \|B^t y\|^2. \end{aligned}$$

注 由 Heinz-Kato 定理也蕴含 L-H 不等式. 事实上, 设 $A \geq B > 0$.

令 $Q = B^{\frac{1}{2}}$, $y = B^{s-\frac{1}{2}}x$, $s \in [0, 1]$. 则由 Heinz-Kato 定理知

$$\begin{aligned} \|B^{\frac{s}{2}}x\|^2 &= \left| \left(B^{\frac{1}{2}}x, B^{s-\frac{1}{2}}x \right) \right| = |(Qx, y)| \\ &\leq \|A^{\frac{s}{2}}x\| \left\| \left(B^{\frac{1}{2}} \right)^{1-s} B^{s-\frac{1}{2}}x \right\| \\ &= \|A^{\frac{s}{2}}x\| \|B^{\frac{s}{2}}x\|. \end{aligned}$$

故 $\|B^{\frac{s}{2}}x\|^2 \leq \|A^{\frac{s}{2}}x\|^2$, 即 $B^s \leq A^s$.

推论 2.1.1 [28], [50] 下列诸条件等价:

- (1) L-H 不等式;
- (2) 若 $A \geq 0$, $B \geq 0$, $0 \leq s \leq 1$, 则 $\|A^s B^s\| \leq \|AB\|^s$;
- (3) 若 $P, Q \geq 0$, 则 $\|P^2 Q\| \geq \|PQP\|$;
- (4) 若 $0 \leq s \leq 1$, $Q^2 \leq A^2$, $Q = Q^*$, $A \geq 0$, 则

$$|(Qx, y)| \leq \|A^s x\| \|A^{1-s} y\|;$$

- (5) Heinz-Kato 定理;

- (6) 若 $A \geq B \geq 0$, 则 $A^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}}$;

(7) 若 $A \geq 0, B \geq 0$, 则 $\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\| \leq \|AB\|^{\frac{1}{2}}$;

(8) 若 $A \geq 0, B \geq 0, Q \geq 0, 0 \leq s \leq 1$, 则

$$\|A^sQB^{1-s}\| \leq \|AQ\|^s\|QB\|^{1-s}.$$

证 (1) \Rightarrow (2). 不妨设 A, B 可逆, 由 (1) 知, $\|A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\| \leq 1$ 蕴含 $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \leq I$, 又蕴含 $A^{-\frac{s}{2}}B^sA^{-\frac{s}{2}} \leq I$, 即 $\|A^{-\frac{s}{2}}B^{\frac{s}{2}}\| \leq 1$. 故当 $\|AB\| \leq 1$ 时, 有 $\|A^sB^s\| \leq 1$. 因此有

$$\left\| \left(\frac{A}{\|AB\|^{\frac{1}{2}}} \right)^s \left(\frac{B}{\|AB\|^{\frac{1}{2}}} \right)^s \right\| \leq 1,$$

即 $\|A^sB^s\| \leq \|AB\|^s$.

(2) \Rightarrow (8).

$$\begin{aligned} \|A^sQB^{1-s}\| &= \|A^sQ^sQ^{1-s}B^{1-s}\| \leq \|A^sQ^s\| \|Q^{1-s}B^{1-s}\| \\ &\leq \|AQ\|^s \|QB\|^{1-s}. \end{aligned}$$

(8) \Rightarrow (4). 先证 (8) 对自伴算子也成立, 事实上, 当 Q 自伴时, 存在酉算子 U 和正算子 P , 使得 $Q = UP$, 且 $U^* = U$, 故可得

$$\begin{aligned} \|A^sQB^{1-s}\| &= \|(UAU)^sPB^{1-s}\| \leq \|UAUP\|^s \|PB\|^{1-s} \\ &= \|AQ\|^s \|QB\|^{1-s}. \end{aligned}$$

假设 (4) 中条件成立, 且 A 可逆, 则有

$$\|(A^{-1})^{1-s}Q(A^{-1})^s\| \leq \|A^{-1}Q\|^{1-s} \|QA^{-1}\|^s = \|QA^{-1}\| \leq 1.$$

从而对任意的 $x, y \in H$, 有

$$\left| \left((A^{-1})^{1-s}Q(A^{-1})^s x, y \right) \right| \leq \|x\| \|y\|,$$

故 (4) 成立.

(7) \Rightarrow (6). 由 $A \geq B \geq 0$, 知 $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \leq I$, 故

$$\left\| A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \right\|^2 = \left\| A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq 1,$$

由 (7) 得

$$\|A^{-\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{4}}\| \leq \|A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\|^{\frac{1}{2}} \leq 1,$$

即 $A^{-\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{4}} \leq I$, 因此 $A^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}}$.

(6) \Rightarrow (1). 由 L-H 不等式的证明即得.

(3) \Rightarrow (7). 设 $A \geq 0, B \geq 0$, 由 (3) 知

$$\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\| = \|A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\|^{\frac{1}{2}} \leq \|AB\|^{\frac{1}{2}}.$$

(7) \Rightarrow (3). $\|PQP\| = \|PQ^{\frac{1}{2}}\|^2 \leq \|P^2Q\|$.

(1) \Rightarrow (5) 和 (5) \Rightarrow (1). 由定理 2.1.2 即得.

(5) \Rightarrow (4). 显然成立.

(4) \Rightarrow (5). 设 $A > 0, B > 0, Q \in L(H)$, 且 $Q^*Q \leq A^2, QQ^* \leq B^2$, 令 $K = H \oplus H$, 考虑 K 上的算子

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix}.$$

因为对 H 中任意两个元素 x, y 及任意两个数 $s, t \geq 0$ 有

$$(R(x \oplus 0), 0 \oplus y) = (Qx, y),$$

$$\|P^s(x \oplus 0)\| = \|A^s x\|, \quad \|P^t(0 \oplus y)\| = \|B^t y\|.$$

$R^2 \leq P^2$ 当且仅当 $Q^*Q \leq A^2, QQ^* \leq B^2$, 故 (4) 蕴含 (5).

最近, T. Furuta 等人进一步得出如下结果:

推论 2.1.2 下列诸条件等价:

- (1) L-H 不等式;
- (2) 若 $A \geq 0, B \geq 0, q \geq 1$, 则 $\|A^q B^q\| \geq \|AB\|^q$;
- (3) 若 $A, B \geq 0, s \geq t > 0$, 则

$$\|A^{\frac{1}{s}}B^{\frac{1}{s}}\|^s \leq \|A^{\frac{1}{t}}B^{\frac{1}{t}}\|^t;$$

- (4) 若 $A \geq 0, B \geq 0, p, q \geq 0$, 且 $\frac{p+q}{2} \geq 1$, 则

$$\|AB\|^{\frac{p+q}{2}} \leq \|A^p B^p\|^{\frac{1}{2}} \|A^q B^q\|^{\frac{1}{2}};$$

(5) 若 $A \geq 0, B \geq 0, s, t > 0$ 且 $\frac{2st}{s+t} \leq 1$, 则

$$\|A^{st}B^{st}\|^2 \leq \|A^sB^s\|^{\frac{2st}{s+t}} \|A^tB^t\|^{\frac{2st}{s+t}};$$

(6) 若 $A \geq 0, B \geq 0, p, q \geq 0$, 且 $\frac{p+q}{2} \geq 1$, 则

$$\|AB\|^{\frac{p+q}{2}} \leq \|A^pB^q\|^{\frac{1}{2}} \|A^qB^p\|^{\frac{1}{2}};$$

(7) 若 $A \geq 0, B \geq 0, s, t > 0$ 且 $\frac{2st}{s+t} \leq 1$, 则

$$\|A^{st}B^{st}\|^2 \leq \|A^sB^t\|^{\frac{2st}{s+t}} \|A^tB^s\|^{\frac{2st}{s+t}}.$$

注意到当 $A, B \geq 0$ 及数 $s, t \geq 0$ 时, 有

$$\left\| A^{\frac{s+t}{2}} B^{\frac{s+t}{2}} \right\|^2 \leq \|B^t A^{s+t} B^s\|.$$

可仿照推论 2.1.1 证明推论 2.1.2.

2.2 Furuta 不等式

设 H 是 Hilbert 空间, 一个大写英文字母表示 H 上的有界线性算子, Furuta 证明了下述不等式, 它是 L-H 不等式的推广.

定理 2.2.1 ^[38] 设 $A \geq B \geq 0$, 则

$$(1) (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}};$$

$$(2) A^{\frac{p+2r}{q}} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$, 且 $(1+2r)q \geq p+2r$.

证 我们只证 (1). (2) 类似可得.

当 $0 \leq p \leq 1$ 时, 由 L-H 不等式知结论明显成立. 故不妨设 $p > 1$ 且由 L-H 不等式, 只需考虑 $q = \frac{p+2r}{1+2r}$ 时的情形. 不失一般性, 可设 A, B

可逆. 令 $B^r A^{\frac{p}{2}} = UH$ 是可逆算子 $B^r A^{\frac{p}{2}}$ 的极分解, 其中 U 是酉算子,

且 $H = |B^r A^{\frac{p}{2}}|$. 当 $0 \leq 2r \leq 1$ 时, $B^{2r} \leq A^{2r}$, 故有

$$\begin{aligned}
 B^{-r}(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} B^{-r} &= B^{-r}(U H^2 U^*)^{\frac{1}{q}} B^{-r} = B^{-r} U H^{\frac{2}{q}} U^* B^{-r} \\
 &= A^{\frac{p}{2}} H^{-1} H^{\frac{2}{q}} H^{-1} A^{\frac{p}{2}} \\
 &= A^{\frac{p}{2}} \left(A^{-\frac{p}{2}} B^{-2r} A^{-\frac{p}{2}} \right)^{1-\frac{1}{q}} A^{\frac{p}{2}} \\
 &\geq A^{\frac{p}{2}} \left(A^{-\frac{p}{2}} A^{-2r} A^{-\frac{p}{2}} \right)^{1-\frac{1}{q}} A^{\frac{p}{2}} \\
 &= A \geq B.
 \end{aligned}$$

故只要 $r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $q = \frac{p+2r}{1+2r}$, 就有

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{1+2r}. \quad (2.2.1)$$

令 $A_1 = (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}}$, $B_1 = B^{1+2r}$, 则 $A_1 \geq B_1 \geq 0$. 如果 $r_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $p_1 \geq 1$, $q_1 = \frac{p_1+2r_1}{1+2r_1}$, 那么应有

$$(B_1^{r_1} A_1^{p_1} B_1^{r_1})^{\frac{1}{q_1}} \geq B_1^{1+2r_1}. \quad (2.2.2)$$

在 (2.2.2) 中, 令 $p_1 = q \geq 1$, $r_1 = \frac{1}{2}$, 则

$$\left(B^{2r+\frac{1}{2}} A^p B^{2r+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \geq B^{2(1+2r)}. \quad (2.2.3)$$

记 $s = 2r + \frac{1}{2}$, 则

$$q_1 = \frac{p_1+2r_1}{1+2r_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{p+2r}{1+2r} + 1 \right) = \frac{p+2s}{1+2s},$$

故 (2.2.1) 及 (2.2.3) 蕴含 $(B^s A^p B^s)^{\frac{1+2s}{p+2s}} \geq B^{1+2s}$ 对一切 $s \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ 成立. 继续下去, 我们可知对一切 $r \geq 0$ 结论成立.

对两个正算子 A, B 及数 $\alpha \in [0, 1]$, 它们的 α 平均定义为

$$A \sharp_{\alpha} B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^{\alpha} A^{\frac{1}{2}}.$$

定理 F 若 $A \geq B \geq 0$, 则对每个 $t \leq 0, p \geq 1$, 有

$$A^t \sharp_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A.$$

事实上, 由 $-\frac{t}{2} \geq 0, p \geq 1, \frac{p-t}{1-t} \geq 1$ 及

$$\left[1 + 2\left(-\frac{t}{2}\right)\right] \frac{p-t}{1-t} \geq p - 2\left(-\frac{t}{2}\right),$$

应用 Furuta 不等式即得. 我们指出利用下面的定理, 还有更强的不等式

$$A^t \sharp_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B \leq A.$$

定理 2.2.2 [40] 设 $A \geq B \geq 0$, 则对每个 $r \geq 0$ 及 $p \geq 1$,

(1) $F(p) = (B^r A^p B^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}}$ 是 p 的单调增函数, 即当 $p_1 \geq p_2 \geq 1$ 时, 有 $F(p_1) \geq F(p_2) \geq F(1) = B^r A B^r \geq B^{1+2r}$;

(2) $G(p) = (A^r B^p A^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}}$ 是 p 的单调降函数, 即当 $p_1 \geq p_2 \geq 1$ 时, 有 $G(p_1) \leq G(p_2) \leq G(1) = A^r B A^r \leq A^{1+2r}$.

证 设 $A \geq B \geq 0$, 则对每个 $r \geq 0$ 有下列不等式 (i), (ii):

$$(i) B^r A^{p+s} B^r \geq (B^r A^p B^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}};$$

$$(ii) (A^r B^p A^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}} \geq A^r B^{p+s} A^r,$$

其中 p, s 满足 $p \geq 0$ 及

$$0 \leq s \leq \begin{cases} p+2r, & 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ p+1, & r \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (*)$$

事实上, 利用降幂引理易得

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}} = B^r A^{\frac{p}{2}} \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{s}{p+2r}} A^{\frac{p}{2}} B^r. \quad (2.2.4)$$

首先, 当 $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ 时, 由 $B^{2r} \leq A^{2r}$, (2.2.4) 及条件 (*), 应用 L-H 不等式得

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}} \leq B^r A^{\frac{p}{2}} A^s A^{\frac{p}{2}} B^r = B^r A^{p+s} B^r.$$

其次, 当 $r \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $\frac{p+2r}{s} \geq 1$ 及

$$\left(1 + 2 \cdot \frac{p}{2}\right) \frac{p+2r}{s} \geq 2r + 2 \cdot \frac{p}{2},$$

故由 Furuta 不等式知

$$\left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{s}{p+2r}} \leq A^s.$$

再由 (2.2.4) 易得 (i) 成立. (ii) 类似证明. 最后利用 L-H 不等式, 可知结论成立.

类似于定理 2.2.2 的证明, 可知有下列结果:

定理 2.2.3 设 $A \geq B \geq 0$, 则对每个固定的 $t \geq 0$ 及 $r \geq 0$ 有

- (1) $F_t(p) = (B^r A^p B^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}}$ 是 $p \geq t \geq 0$ 上的关于 p 单调增函数;
- (2) $G_t(p) = (A^r B^p A^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}}$ 是 $p \geq t \geq 0$ 上的关于 p 单调降函数.

作为 Furuta 不等式的推广, 我们有下列广义的 Furuta 不等式:

定理 G (广义 Furuta 不等式) 如果 $A \geq B \geq 0$, 且 $A > 0$, 则对 $t \in [0, 1]$ 及 $p \geq 1$ 有

$$A^{1-t+r} \geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}},$$

其中 $s \geq 1$ 且 $r \geq t$.

证 不妨设 $B > 0$, 现证明: 如果 $A \geq B \geq 0$, 且 $A > 0$, 则对 $t \in [0, 1]$ 及 $p \geq 1$, $s \geq 1$ 有

$$A \geq \left[A^{\frac{t}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{t}{2}} \right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}}. \quad (2.2.5)$$

当 $1 \leq s \leq 2$ 时, 由降幂引理和 L-H 不等式知

$$B_1 = \left[A^{\frac{t}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{t}{2}} \right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[B_2^{\frac{p}{2}} \left(B_2^{\frac{p}{2}} A^{-t} B_2^{\frac{p}{2}} \right)^{s-1} B_2^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \\
&\leq \left[B_2^{\frac{p}{2}} \left(B_2^{\frac{p}{2}} B^{-t} B_2^{\frac{p}{2}} \right)^{s-1} B_2^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \\
&= B \leq A = A_1.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

对 $A_1 \geq B_1 > 0$, 应用 (2.2.6), 则对 $t_1 \in [0, 1]$ 及 $p_1 \geq 1$, $1 \leq s_1 \leq 2$ 有

$$A_1 \geq \left[A_1^{\frac{t_1}{2}} \left(A_1^{\frac{-t_1}{2}} B_1^{p_1} A_1^{\frac{-t_1}{2}} \right)^{s_1} A_1^{\frac{t_1}{2}} \right]^{\frac{1}{(p_1-t_1)s_1+t_1}}. \tag{2.2.7}$$

令 $t_1 = t \in [0, 1]$ 且 $p_1 = (p-t)s + t \geq 1$ 于 (2.2.7) 中, 则

$$A \geq \left[A^{\frac{t}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{s_1 s} A^{\frac{t}{2}} \right]^{\frac{1}{(p-t)s_1 s+t}}. \tag{2.2.8}$$

对 $t \in [0, 1]$ 及 $p \geq 1$, $1 \leq s_1 s \leq 4$ 成立. 重复这一过程, 可知 (2.2.5) 对任意 $s \geq 1$ 成立. 令

$$A_2 = A, \quad B_2 = \left[A^{\frac{t}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{t}{2}} \right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}},$$

应用 Furuta 不等式对 $A_2 \geq B_2 \geq 0$, 知

$$A_2^{1+r_2} \geq \left(A_2^{\frac{r_2}{2}} B_2^{p_2} A_2^{\frac{r_2}{2}} \right)^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}},$$

对 $r_2 = r - t \geq 0$, $p_2 = (p-t)s + t \geq 1$ 成立, 此即定理 G 结论成立.

2.3 具有负幂指数的 Furuta 型不等式

定理 2.3.1 [29], [69], [82], [116] 如果 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 那么下面结论成立:

$$(I) \text{ 若 } 1 \geq p > t \geq 0, p \geq \frac{1}{2}, \text{ 则 } A^{1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{1-t}{p-t}};$$

$$(II) \text{ 若 } 1 \geq t > p \geq 0, \frac{1}{2} \geq p, \text{ 则 } A^{-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{-t}{p-t}};$$

$$(III) \text{ 若 } \frac{1}{2} \geq p > t \geq 0, \text{ 则 } A^{2p-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{2p-t}{p-t}};$$

$$(IV) \text{ 若 } 1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}, \text{ 则 } A^{2p-1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}}.$$

为了证明该定理, 我们首先给出下列引理:

引理 2.3.1 设 $0 \leq t < p \leq 1$ 且 $p \leq \delta \leq \min\{2p, 2(p-t)+1\}$. 则有

(1) 若对某个自然数 k 有 $2k \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+1$, 则

$$0 \leq \delta - 2k(p-t) \leq \delta - 2(k-1)(p-t) \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(p-t) \leq 1;$$

$$-1 \leq \delta - 2k(p-t) - 2t \leq \delta - 2(k-1)(p-t) - 2t \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(p-t) - 2t \leq 0;$$

(2) 若对某个自然数 k 有 $2k+1 \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+2$, 则

$$-1 \leq \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \leq \delta - 2k(p-t) - 2t \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(p-t) - 2t \leq 0;$$

$$0 \leq \delta - 2k(p-t) \leq \delta - 2(k-1)(p-t) \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(p-t) \leq 1.$$

设 $0 \leq p < t \leq 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \leq \delta \leq p$. 则有

(3) 若对某个自然数 k 有 $2k \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+1$, 则

$$0 \leq \delta - 2(p-t) \leq \delta - 4(p-t) \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2k(p-t) \leq 1;$$

$$-1 \leq \delta - 2p \leq \delta - 4(p-t) - 2t \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2k(p-t) - 2t \leq 0;$$

(4) 若对某个自然数 k 有 $2k+1 \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+2$, 则

$$-1 \leq \delta - 2(p-t) - 2t \leq \delta - 4(p-t) - 2t \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \leq 0;$$

$$0 \leq \delta - 2(p-t) \leq \delta - 4(p-t) \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2k(p-t) \leq 1.$$

证 假设 $0 \leq t < p \leq 1$ 且 $p \leq \delta \leq \min\{2p, 2(p-t) + 1\}$.

(1) 当 $2k \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+1$ 时, 有 $2k(p-t) \leq \delta-p < (2k+1)(p-t)$,

故

$$0 \leq p \leq \delta - 2k(p-t) \leq \delta - 2(k-1)(p-t) \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(p-t) \leq 1;$$

$$-1 \leq p - 2t \leq \delta - 2k(p-t) - 2t \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(p-t) - 2t = \delta - 2p \leq 0.$$

(2) 当 $2k+1 \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+2$ 时, 有 $(2k+1)(p-t) \leq \delta-p <$

$(2k+2)(p-t)$, 故

$$0 \leq 2p-t \leq \delta - 2k(p-t) \leq \dots \leq \delta - 2(p-t) \leq 1;$$

$$-1 \leq -t = p - (p-t) - 2t \leq \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2(p-t) - 2t = \delta - 2p \leq 0.$$

假设 $0 \leq p < t \leq 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \leq \delta \leq p$.

(3) 若对某个自然数 k 有 $2k \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+1$, 则

$$2k(p-t) \geq \delta-p > (2k+1)(p-t),$$

故 $\delta - 2k(p-t) - 2t \leq p - 2t \leq 0$, 即

$$\delta - 2k(p-t) \leq p \leq 1.$$

从而由 $2(p-t) \leq \delta$, 知

$$0 \leq \delta - 2(p-t) \leq \delta - 4(p-t) \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2k(p-t) \leq p \leq 1;$$

$$-1 \leq \delta - 2p \leq \delta - 4(p-t) - 2t \leq \dots$$

$$\leq \delta - 2k(p-t) - 2t \leq p - 2t \leq 0.$$

(4) 若对某个自然数 k 有 $2k+1 \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+2$, 则

$$(2k+1)(p-t) \geq \delta-p > (2k+2)(p-t),$$

故

$$\begin{aligned} \delta - 2k(p-t) &\leq 2p-t \leq p \leq 1, \\ \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t &= \delta - 2k(p-t) - 2p \\ &\leq 2p-t-2p = -t \leq 0. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} -1 &\leq \delta - 2(p-t) - 2t \leq \delta - 4(p-t) - 2t \leq \dots \\ &\leq \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \leq 0; \\ 0 &\leq \delta - 2(p-t) \leq \delta - 4(p-t) \leq \dots \\ &\leq \delta - 2k(p-t) \leq 1. \end{aligned}$$

引理 2.3.2 设 $A \geq B \geq 0$.

(1) 若 $0 \leq t < p \leq 1$ 且 $p \leq \delta \leq \min\{2p, 2(p-t)+1\}$, 则

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \leq B^{\delta-p}.$$

(2) 若 $0 \leq p < t \leq 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \leq \delta \leq p$, 则

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \leq B^{\delta-p}.$$

证 (1) 设 $0 \leq t < p \leq 1$ 且 $p \leq \delta \leq \min\{2p, 2(p-t)+1\}$.

若对某个自然数 k 有 $2k \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+1$, 则由引理 2.3.1 及 L-H

不等式得

$$\begin{aligned} &\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \\ &= \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^k \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}-2k} \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k B^{\delta-p-2k(p-t)} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k \\
&= \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\delta-2k(p-t)} A^{-t} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} B^{\frac{p}{2}} A^{\delta-2k(p-t)-2t} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} B^{\delta-2k(p-t)-2t+p} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&= \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-2} B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\delta-2(k-1)(p-t)} A^{-t} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-2} \\
&\leq \dots \\
&\leq B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\delta-2(p-t)} A^{-t} B^{\frac{p}{2}} \\
&\leq B^{\frac{p}{2}} A^{\delta-2p} B^{\frac{p}{2}} \leq B^{\delta-p}.
\end{aligned}$$

若对某个自然数 k 有 $2k+1 \leq \frac{\delta-p}{p-t} < 2k+2$, 则由降幂引理得

$$\begin{aligned}
&\left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \\
&= \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}-2k} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k \\
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k B^{\frac{p}{2}} A^{\delta-2(k+1)(p-t)-2t} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k \\
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k B^{\delta-2(k+1)(p-t)+p-2t} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^k \\
&= \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\delta-2k(p-t)} A^{-t} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} B^{\frac{p}{2}} A^{\delta-2k(p-t)-2t} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\leq \dots \\
&\leq B^{\frac{p}{2}} A^{\delta-2(p-t)-2t} B^{\frac{p}{2}} \leq B^{\delta-p}.
\end{aligned}$$

(2) 若 $0 \leq p < t \leq 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \leq \delta \leq p$, 则也可仿照 (1) 来证明. 故略去.

定理 2.3.1 的证明 (I) 若 $1 \geq p > t \geq 0$, $p \geq \frac{1}{2}$, 则在引理 2.3.2

(1) 中取 $\delta = 1$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1-p}{p-t}} \leq B^{1-p}.$$

从而

$$\begin{aligned} \left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{1-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1-p}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}B^{1-p}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \leq A^{1-t}. \end{aligned}$$

(II) 若 $1 \geq t > p \geq 0$, $\frac{1}{2} \geq p$, 则在引理 2.3.2 (2) 中取 $\delta = 0$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{-p}{p-t}} \leq B^{-p}.$$

从而

$$\begin{aligned} \left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{-p}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq A^{-t}. \end{aligned}$$

(III) 若 $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$, 则在引理 2.3.2 (1) 中取 $\delta = 2p$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p-t}} \leq B^p.$$

从而

$$\begin{aligned} \left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{2p-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq A^{-\frac{t}{2}}B^{2p}A^{-\frac{t}{2}} \leq A^{2p-t}. \end{aligned}$$

(IV) 若 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$, 则在引理 2.3.2 (2) 中取 $\delta = 2p - 1$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p-1}{p-t}} \leq B^{p-1}.$$

从而

$$\begin{aligned} \left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p-1}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq A^{-\frac{t}{2}}B^{2p-1}A^{-\frac{t}{2}} \leq A^{2p-1-t}. \end{aligned}$$

2.4 关于负幂的 Furuta 型不等式的推广

本节我们给出负幂的 Furuta 型不等式等价于 Tanahashi 不等式的证明, 接着把这个结果推广为一类保序不等式.

首先回忆负幂的 Furuta 型不等式即下面的定理 2.4.A:

定理 2.4.A 如果 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 那么下面的结论成立:

- (I) 若 $1 \geq p > t \geq 0$, $p \geq \frac{1}{2}$, 则 $A^{1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{1-t}{p-t}}$;
- (II) 若 $1 \geq t > p \geq 0$, $\frac{1}{2} \geq p$, 则 $A^{-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{-t}{p-t}}$;
- (III) 若 $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$, 则 $A^{2p-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-t}{p-t}}$;
- (IV) 若 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$, 则 $A^{2p-1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}}$.

最近 K. Tanahashi 又得出下列不等式:

定理 2.4.B ^[82] 若 $A \geq B > 0$, $0 \leq p \leq 1$, $0 < q \leq 1$ 且 $-1 \leq 2r \leq 0$, 则

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}} \quad (2.4.1)$$

在实数 p, q, r 满足

$$-2r(1-q) \leq p \leq q - 2r(1-q) \quad (2.4.2)$$

和以下条件之一时成立:

$$\frac{1}{2} \leq q \leq 1 \quad (2.4.3)$$

或

$$0 < q < \frac{1}{2}, \quad \frac{-2r(1-q)-q}{1-2q} \leq p \leq \frac{-2r(1-q)}{1-2q}. \quad (2.4.4)$$

在本部分中我们证明了定理 2.4.A 和定理 2.4.B 等价于下面的定理 2.4.1.

定理 2.4.1 ^[105] 若 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则

$$A^{\theta-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{\theta-t}{p-t}} \quad (2.4.5)$$

在下面任意一个条件成立时成立:

$$T_1: 0 \leq t < p \leq \theta \leq \min\{2p, 1\};$$

$$T_2: \max\{0, 2p-1\} \leq \theta \leq p < t \leq 1;$$

$$T_3: 0 \leq t < p \leq 1 \text{ 和 } t \leq \theta \leq \min\{2p, 1\};$$

$$T_4: 0 \leq p < t \leq 1 \text{ 和 } \max\{0, 2p-1\} \leq \theta \leq t.$$

如果我们在 (T_1) 中取 $\theta = 1$, 或 $2p$; 在 (T_2) 中取 $\theta = 0$, 或 $2p-1$, 则均可由定理 2.4.1 推出定理 2.4.A; 反过来可以用一次 L-H 不等式, 则由定理 2.4.A 推出定理 2.4.1, 而且它可以推广为如下的保序不等式:

定理 2.4.2 ^[105] 若 $A_1 \geq A_2 \geq B > 0$, 则

$$\left(B^r A_1^{\alpha_1} B^r \right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \geq \left(B^r A_2^{\alpha_2} B^r \right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}} \quad (2.4.6)$$

在下面任意一个条件成立时成立:

$$(i) \quad 0 \leq \alpha_2 < -2r < \alpha_1 \leq \min\{-4r, 1\} \text{ 且}$$

$$-2r \leq \theta \leq \min\{-4r, 1, 2\alpha_1 - \alpha_2\};$$

$$(ii) \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 < -2r \leq 1 \text{ 且}$$

$$\max\{\alpha_2, 2\alpha_1 - \min\{-4r, 1\}\} \leq \theta \leq -2r;$$

$$(iii) \quad \max\{0, -4r-1\} \leq \alpha_1 < -2r < \alpha_2 \leq 1 \text{ 且}$$

$$\max\{2\alpha_1 - \alpha_2, 0, -4r-1\} \leq \theta \leq -2r;$$

$$(iv) \quad 0 \leq -2r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1 \text{ 且}$$

$$-2r \leq \theta \leq \min\{\alpha_2, 2\alpha_1 - \max\{0, -4r-1\}\}.$$

为证明上述结果, 我们先引述几个引理.

引理 2.4.A ^[43] 若 $A > 0$, B 可逆, 则

$$(BAB^*)^s = BA^{\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{1}{2}} B^* BA^{\frac{1}{2}} \right)^{s-1} A^{\frac{1}{2}} B^*$$

对任意实数 s 都成立.

引理 2.4.B ^[98] 令 $A > 0$, $B > 0$, 且 $\beta, r, \alpha_1, \alpha_2$ 是满足下列条件的任意实数: $\alpha_1 + r \neq 0$, $\alpha_2 + r \neq 0$. 则

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.$$

为了证明下面的定理, 我们把引理 2.4.B 加强为以下的引理 2.4.C.

引理 2.4.C 令 $A > 0$, $B > 0$, 且 $\beta, r, \alpha_1, \alpha_2$ 满足下列条件的任意实数: $\alpha_1 + r \neq 0$, $\alpha_2 + r \neq 0$. 则

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A_1^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A_2^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\begin{aligned} & \left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \\ & \geq \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}. \end{aligned}$$

下面我们证明定理 2.4.B 和定理 2.4.1 是等价的.

定理 2.4.B \Rightarrow 定理 2.4.1 (1) 假设 $0 \leq t < p \leq \theta \leq \min\{2p, 1\}$.

不妨令

$$r = \frac{-t}{2}, \quad q = \frac{p-t}{\theta-t},$$

则 $-1 \leq 2r \leq 0$, $0 < q \leq 1$, 且由 $t\theta \leq p \leq p-t+t\theta$ 可知

$$t(\theta-p) \leq p(\theta-t) \leq p-t+t(\theta-p).$$

我们可得

$$t\left(1 - \frac{p-t}{\theta-t}\right) \leq p \leq \frac{p-t}{\theta-t} + t\left(1 - \frac{p-t}{\theta-t}\right).$$

因此 (2.4.2) 成立.

如果 $t + \theta \leq 2p$, 那么 (2.4.3) 成立.

如果 $t + \theta > 2p$, 那么 $0 < q < \frac{1}{2}$,

$$(2p-1)(p-t) \leq (p-t)\theta \leq 2p(p-t).$$

则

$$t(\theta-p) - (p-t) \leq p(\theta+t-2p) \leq t(\theta-p).$$

因此 (2.4.4) 成立.

(2) 假设 $\max\{0, 2p-1\} \leq \theta < p \leq t \leq 1$. 不妨令

$$r = \frac{-t}{2}, \quad q = \frac{p-t}{\theta-t},$$

那么 $-1 \leq 2r < 0$, $0 < q \leq 1$. 又由 $t\theta \geq p\theta \geq p-t+t\theta$, 有

$$t(\theta-p) \geq p(\theta-t) \geq p-t+t(\theta-p).$$

故由 $\theta-t < 0$, 可知

$$t\left(1 - \frac{p-t}{\theta-t}\right) \leq p \leq \frac{p-t}{\theta-t} + t\left(1 - \frac{p-t}{\theta-t}\right).$$

因此 (2.4.2) 成立.

如果 $\theta+t \geq 2p$, 那么 $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$.

如果 $\theta+t < 2p$, 那么 $0 < q < \frac{1}{2}$,

$$(2p-1)(p-t) \geq (p-t)\theta \geq 2p(p-t),$$

则

$$t(\theta-p) - (p-t) \geq p(\theta+t-2p) \geq t(\theta-p).$$

由 $\theta+t-2p < 0$, 我们可得

$$\frac{-2r(1-q)-q}{1-2q} \leq p \leq \frac{-2r(1-q)}{1-2q}.$$

因此 (2.4.4) 成立. 由定理 2.4.B, (2) 得证.

(3) 假设 $0 \leq t < p \leq 1$, $t \leq \theta \leq \min\{2p, 1\}$. 由 (1), 我们只需证明在 $t \leq \theta \leq p$ 的条件下定理成立. 取 θ_1 满足 $0 \leq t < p \leq \theta_1 \leq \min\{2p, 1\}$. 由 (1), 我们可得

$$A^{\theta_1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{\theta_1-t}{p-t}}.$$

因为 $\frac{\theta-t}{\theta_1-t} \in [0, 1]$, 所以由 Löwner-Heinz 定理即得 (2.4.5).

(4) 仿照 (3) 的证明即得 (T_4) .

定理 2.4.1 \Rightarrow 定理 2.4.B 令

$$r = -\frac{t}{2}, \quad q = \frac{p-t}{\theta-t}.$$

(1) 假设 $\theta > t$. 由 (2.4.2), 我们可得

$$t \left(\frac{\theta-p}{\theta-t} \right) \leq p \leq \frac{p-t+t(\theta-p)}{\theta-t}.$$

于是 $t\theta \leq p\theta \leq p-t+t\theta$. 因此, $t \leq p$, $\theta \leq 1$.

如果 (2.4.3) 成立, 我们可得 $\frac{\theta+t}{2} \leq p \leq \theta$. 由于 $t = p$, 可以推出 $t = \theta$. 所以 $0 \leq t < p \leq \theta \leq 1$, $\theta \leq 2p-t \leq 2p$. 由定理 2.4.1 的 (T_1) , (2.4.1) 得证.

如果 (2.4.4) 成立, 我们可得

$$t < p \leq \frac{\theta+t}{2}, \quad \frac{t(\theta-p)-(p-t)}{\theta+t-2p} \leq p \leq \frac{t(\theta-p)}{\theta+t-2p}.$$

又 $\theta+t-2p > 0$, $p-t > 0$, 则 $2p-t \leq \theta \leq 2p$. 因此

$$0 \leq t < p \leq 1, \quad t \leq 2p-t \leq \theta \leq \min\{1, 2p\}.$$

由定理 2.4.1 的 (T_3) , (2.4.1) 得证.

(2) 假设 $\theta < t$. 由 (2.4.2), 得

$$t\theta \geq p\theta \geq p-t+t\theta.$$

如果 (2.4.3) 成立, 则 $\frac{\theta+t}{2} \geq p \geq \theta$. 所以

$$\theta \leq p < t \leq 1, \quad 0 \leq \theta, \quad t \geq 2p-t \geq 2p-1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_2) , (2.4.1) 得证.

如果 (2.4.4) 成立, 我们可得

$$t > p > \frac{\theta + t}{2}, \quad \frac{t(\theta - p) - (p - t)}{\theta + t - 2p} \leq p \leq \frac{t(\theta - p)}{\theta + t - 2p}.$$

由 $\theta + t - 2p < 0$, $p - t < 0$, 得 $2p - 1 \leq \theta \leq 2p$. 所以

$$0 \leq p < t \leq 1, \quad \max\{0, 2p - 1\} \leq \theta < t.$$

又由定理 2.4.1 的 (T_4) , (2.4.1) 得证.

定理 2.4.2 的证明 (1) 假设条件 (i) 成立. 不妨设 $\theta_1 = \min\{-4r, 1\}$, 则

$$0 \leq \alpha_2 < -2r \leq \theta_1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_1) , 可得

$$\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-2r} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta_1 - \alpha_2}{-2r - \alpha_2}} \leq A_2^{\theta_1 - \alpha_2}. \quad (2.4.7)$$

记

$$X = \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2 - \theta_1}{2r + \alpha_2}}.$$

又由 $0 \leq \alpha_2 < \alpha_1 < \theta_1 \leq \min\{2\alpha_1, 1\}$ 和定理 2.4.1 的 (T_1) , 可得

$$A_2^{\theta_1 - \alpha_2} \leq \left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}.$$

记 $Y = \left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2 - \theta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}$, 则 $Y \leq X$. 令

$$R = \frac{\alpha_2 + 2r}{\alpha_2 - \theta_1}, \quad P = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \theta_1}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha_2 - \theta}{\alpha_2 - \theta_1}.$$

那么由 $\alpha_2 < -2r < \alpha_1 \leq \theta_1$ 可得 $0 < R < P \leq 1$, 又由 $-2r \leq \theta \leq \min\{2\alpha_1 - \alpha_2, \theta_1\}$ 可得 $R \leq \theta_2 \leq \min\{2P, 1\}$. 于是

$$0 < R < P \leq 1, \quad R \leq \theta_2 \leq \min\{2P, 1\}.$$

由定理 2.4.1 的 (T_3) , 可知

$$\left(X^{-\frac{R}{2}} Y^P X^{-\frac{R}{2}}\right)^{\frac{\theta_2 - R}{P - R}} \leq X^{\theta_2 - R}.$$

所以

$$\begin{aligned} & \left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \\ & \geq \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

由 (2.4.8) 和引理 2.4.C, 即得 (2.4.6).

(2) 假设条件 (ii) 成立. 令 $\theta_1 = \min\{-4r, 1\}$, 则 $0 \leq \alpha_2 < -2r \leq \theta_1$. 由定理 2.4.1 的 (T_1) , 可得

$$\left(A_1^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-2r} A_1^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{-2r-\alpha_2}} \leq A_1^{\theta_1-\alpha_2}.$$

记

$$X = \left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2-\theta_1}{2r+\alpha_2}} \geq A_1^{\alpha_2-\theta_1} = Y. \quad (2.4.9)$$

记

$$R = \frac{\alpha_2 + 2r}{\alpha_2 - \theta_1}, \quad P = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \theta_1}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha_2 - \theta_1}{\alpha_2 - \theta_1}.$$

则由 $\alpha_2 < \alpha_1 < -2r \leq \theta_1$, 可得 $0 \leq P < R \leq 1$, 由 $\max\{\alpha_2, 2\alpha_1 - \theta_1\} \leq \theta \leq -2r$, 可得

$$\max\{0, 2P - 1\} \leq \theta_2 \leq R.$$

因此定理 2.4.1 的 (T_4) 的条件得以满足, 则

$$\left(X^{-\frac{R}{2}} Y^P X^{-\frac{R}{2}} \right)^{\frac{\theta_2-R}{P-R}} \leq X^{\theta_2-R}.$$

所以

$$\begin{aligned} & \left[\left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A_1^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \\ & \geq \left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{2r} A_1^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

由 (2.4.10) 和引理 2.4.B, 可得

$$(B^r A_1^{\alpha_1} B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \geq (B^r A_1^{\alpha_2} B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \quad (2.4.11)$$

因为 $0 \leq \frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r} \leq 1$, $0 \leq \alpha_2 \leq 1$, 由 L-H 不等式和 (2.4.11) 可得 (2.4.6).

(3) 假设条件 (iii) 成立. 设 $\theta_1 = \max\{-4r - 1, 0\}$, 则

$$\theta_1 \leq -2r < \alpha_2 \leq 1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_2) , 即得 (2.4.7). 又由 $\max\{0, 2\alpha_1 - 1\} \leq \theta_1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ 和定理 2.4.1 的 (T_2) , 可得

$$A_2^{\theta_1 - \alpha_2} \leq \left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\theta_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}.$$

此处若 X, Y 的记法和 (1) 一样, 则 $Y \leq X$. 令 R, P 和 θ_2 的记法也和 (1) 一样, 则由 $\alpha_2 > -2r > \alpha_1 \geq \theta_1$ 可以推得 $0 < R < P \leq 1$, 由 $-2r \geq \theta \geq \max\{2\alpha_1 - \alpha_2, \theta_1\}$, 可以推得 $R \leq \theta_2 \leq \min\{2P, 1\}$, 即

$$0 < R < P \leq 1, \quad R \leq \theta_2 \leq \min\{2P, 1\}.$$

由定理 2.4.1 的 (T_3) , (2.4.8) 得证, 由 (2.4.8) 和引理 2.4.C, 又可得 (2.4.6).

(4) 假设条件 (iv) 成立. 不妨设 $\theta_1 = \max\{-4r - 1, 0\}$, 则

$$\max\{-4r - 1, 0\} = \theta_1 \leq -2r < \alpha_2 \leq 1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_2) , 得 (2.4.9). 同上此处 X, Y 的记法和 (2) 一样, 则 $Y \leq X$. 令 R, P 和 θ_2 的记法也和 (2) 一样, 则由 $\theta_1 \leq -2r < \alpha_1 \leq \alpha_2$ 可以推得 $0 \leq P < R \leq 1$, 且

$$-2r \leq \theta \leq \min\{\alpha_2, 2\alpha_1 - \theta_1\}, \quad \max\{0, 2P - 1\} \leq \theta_2 \leq R.$$

由定理 2.4.1 的 (T_4) , 又可推出 (2.4.10), 由 (2.4.10) 和引理 2.4.B, 可得 (2.4.11). 又因为

$$0 \leq \frac{\theta + 2r}{\alpha_2 + 2r} \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 1,$$

由 L-H 不等式和 (2.4.11), 可得 (2.4.6).

注 我们说定理 2.4.2 是定理 2.4.1 的推广.

若在定理 2.4.2 中取 $A_1 = A_2 = A$, 并在 (i) (或 (iii)) 中令

$$\alpha_1 = \theta, \quad r = \frac{-p}{2}, \quad \alpha_2 = t,$$

则由 (i) (或 (iii)) 可得 (T_1) (或 (T_2)), 由 (2.4.6) 可以推出

$$B^{\frac{-p}{2}} A^\theta B^{\frac{-p}{2}} \geq \left(B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}} \right)^{\frac{\theta - p}{t - p}}.$$

再由引理 2.4.A, 得 (2.4.5).

如果在 (ii) 中取 $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = p$, $r = \frac{-t}{2}$, 则 (ii) 变为

$$0 \leq p < t \leq 1, \quad \max\{0, 2p - \min\{2t, 1\}\} \leq \theta \leq t.$$

而由 $0 \leq p < t \leq 1$, 得

$$\max\{0, 2p - \min\{2t, 1\}\} = \max\{0, 2p - 1\}.$$

所以我们说, (ii) 可推出 (T_3) , 且 (2.4.6) 等价于

$$\left(B^{\frac{-t}{2}} A^p B^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta-t}{p-t}} \geq B^{\theta-t}. \quad (2.4.12)$$

因此, 由 $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$ 和 (2.4.12) 可得 (2.4.5).

如果在 (iv) 中取 $\alpha_2 = 1$, $r = -\frac{t}{2}$, $\alpha_1 = p$, 则得

$$0 \leq t < p \leq 1, \quad t \leq \theta \leq \min\{1, 2p - \max\{0, 2t - 1\}\}.$$

而由 $0 \leq t < p \leq 1$, 得

$$\min\{1, 2p - \max\{0, 2t - 1\}\} = \min\{2p, 1\}.$$

所以 (iv) 可推出 (T_4) , (2.4.6) 可以推出

$$\left(B^{\frac{-t}{2}} A^p B^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta-t}{p-t}} \geq \left(B^{\frac{-t}{2}} A B^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta-t}{1-t}} \geq B^{\theta-t}. \quad (2.4.13)$$

因此, 由 $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$ 和 (2.4.13) 可得 (2.4.5).

推论 2.4.1 如果 $A_1 \geq A_2 \geq B > 0$, 那么 (2.4.6) 在下面任一条件成立时成立:

$$(i) \quad -\frac{1}{2} \leq r \leq -\frac{1}{4}, \quad 0 \leq \alpha_2 < -2r < \alpha_1 \leq 1 \text{ 且}$$

$$-2r \leq \theta \leq \min\{1, 2\alpha_1 - \alpha_2\};$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{2} \leq r \leq -\frac{1}{4}, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 < -2r \leq 1 \text{ 且}$$

$$\max\{\alpha_2, 2\alpha_1 - 1\} \leq \theta \leq -2r;$$

$$(iii) \quad -\frac{1}{4} \leq r \leq 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < -2r < \alpha_2 \leq 1 \text{ 且}$$

$$\max\{2\alpha_1 - \alpha_2, 0\} \leq \theta \leq -2r;$$

$$(iv) \quad -\frac{1}{4} \leq r \leq 0, \quad 0 \leq -2r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1 \text{ 且}$$

$$-2r \leq \theta \leq \min\{\alpha_2, 2\alpha_1\}.$$

2.5 Kantorovich 不等式和 Hölder-McCarthy 不等式

定理 2.5.1 (Kantorovich 不等式) 设 A 是 H 上的正算子, $0 \leq m \leq A \leq M$, 则对 H 中每个单位向量 x 有

$$(1) \quad (Ax, x)(A^{-1}x, x) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm};$$

$$(2) \quad (A^2x, x) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}(Ax, x)^2.$$

证 (1) 由于

$$0 \leq (MI - A)A^{-1}(A - mI) = MI - A - MmA^{-1} + mI,$$

故对 H 中每个单位向量 x 有

$$\begin{aligned} m + M &\geq (Ax, x) + mM(A^{-1}x, x) \\ &\geq 2\sqrt{mM(Ax, x)(A^{-1}x, x)}, \end{aligned}$$

从而 (1) 成立.

(2) 由 (1) 知,

$$\left(A \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|} \right) \left(A^{-1} \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|} \right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}.$$

从而

$$(A^2x, x)(x, x) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \|A^{\frac{1}{2}}x\|^4,$$

因此 (2) 成立.

注 $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ 称为 Kantorovich 常数, 它是 m, M 的算术平均数与几何平均数之比的平方, 并且易知该定理 2.5.1 中 (1) 和 (2) 等价.

定理 2.5.2 (Hölder-McCarthy 不等式) 设 A 是 H 上的正算子, 则

- (1) 对 H 中每个单位向量 x 及 $\lambda > 1$, 有 $(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda$;
- (2) 对 H 中每个单位向量 x 及 $\lambda \in [0, 1]$, 有 $(A^\lambda x, x) \leq (Ax, x)^\lambda$;
- (3) 当 A 可逆时, 对 H 中每个单位向量 x 及 $\lambda < 0$, 有

$$(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda.$$

证 先证 (2). 显见 (2) 对 $\lambda = 0, 1$ 成立, 下证若 (2) 对某 $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 成立, 则它对 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 亦成立. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \left(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x, x \right) \right|^2 &= \left| \left(A^{\frac{\alpha}{2}} x, A^{\frac{\beta}{2}} x \right) \right|^2 \leq (A^\alpha x, x)(A^\beta x, x) \\ &\leq (Ax, x)^\alpha (Ax, x)^\beta = (Ax, x)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

故由算子的连续性, 知 (2) 的结论成立.

其次证 (1). 如果 $\lambda > 1$, 则由 (2) 对 H 中每个单位向量 x 有

$$(Ax, x) = (A^{\frac{1}{\lambda}} x, x) \leq (A^\lambda x, x)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

故 (1) 成立.

最后证 (3). 对 H 中每个单位向量 x 有

$$1 = \left| \left(A^{\frac{1}{2}} x, A^{-\frac{1}{2}} x \right) \right|^2 \leq \|A^{\frac{1}{2}} x\|^2 \|A^{-\frac{1}{2}} x\|^2 = (Ax, x)(A^{-1}x, x).$$

故 (3) 对 $\lambda = -1$ 时成立.

如果 $\lambda < -1$, 则由 (1) 知, 对 H 中每个单位向量 x 有

$$\begin{aligned} (A^\lambda x, x) &= (A^{-|\lambda|} x, x) \geq (A^{-1} x, x)^{|\lambda|} \\ &\geq (Ax, x)^{-|\lambda|} = (Ax, x)^\lambda. \end{aligned}$$

如果 $-1 \leq \lambda < 0$, 则由 (2) 知, 对 H 中每个单位向量 x 有

$$\begin{aligned} (A^\lambda x, x) &= (A^{-|\lambda|} x, x) \geq (A^{|\lambda|} x, x)^{-1} \\ &\geq (Ax, x)^{-|\lambda|} = (Ax, x)^\lambda. \end{aligned}$$

注 Hölder-McCarthy 不等式与下述的 Young 不等式等价^[37]:

$$\lambda A + I - \lambda \geq A^\lambda.$$

事实上, 易见有不等式 $\lambda a + 1 - \lambda \geq a^\lambda$, 其中 $a \geq 0$, $\lambda \in [0, 1]$.

(H-M) \Rightarrow (Young). 对单位向量 x 和 $\lambda \in [0, 1]$, 由 $(Ax, x) \geq 0$ 有

$$\lambda(Ax, x) + 1 - \lambda \geq (Ax, x)^\lambda \geq (A^\lambda x, x).$$

(Young) \Rightarrow (H-M). 设 $\lambda \in (0, 1]$, $(Ax, x) \neq 0$. 在 Young 不等式中, 用 $(Ax, x)^{-1}A$ 代替 A , 可得 Hölder-McCarthy 不等式. 如果 $(Ax, x) = 0$, 则 $A^{\frac{1}{2}}x = 0$, 故 $A^\lambda x = 0$, 从而 Hölder-McCarthy 不等式仍成立.

下面考虑 Kantorovich 不等式和 Hölder-McCarthy 不等式的推广, 为此先给出下面的引理:

引理 2.5.1 设 $0 < m < M$,

$$h(t) = \frac{1}{t^q} \left[k + \frac{K-k}{M-m}(t-m) \right]$$

是定义在区间 $[m, M]$ 上的一个函数, 其中 $q \neq 0, 1$; K, k 是任意实数. 则当 m, M, K, k 及 q 满足下列 (i) 或 (ii) 时, $h(t)$ 在区间 $[m, M]$ 上的最大值为

$$\frac{mK - Mk}{(q-1)(M-m)} \left[\frac{(q-1)(K-k)}{q(mK - Mk)} \right]^q,$$

其中

$$(i) \quad K > k, \quad \frac{K}{M} \geq \frac{k}{m}, \quad q > 1 \text{ 及 } \frac{k}{m}q \leq \frac{K-k}{M-m} \leq \frac{K}{M}q;$$

$$(ii) \quad K < k, \quad \frac{K}{M} \leq \frac{k}{m}, \quad q < 0 \text{ 及 } \frac{k}{m}q \leq \frac{K-k}{M-m} \leq \frac{K}{M}q.$$

证 事实上, 在 (i) 或 (ii) 条件下, $h(t)$ 在 $[m, M]$ 上只有一个稳定点 $t_1 = \frac{q(mK - Mk)}{(q-1)(K-k)}$, 且 $h'(t)$ 在 $[m, t_1]$ 上大于 0, 在 $[t_1, M]$ 上小于 0, 从而它在该点处达到最大值.

定理 2.5.3^[34] 设 A 是 H 上的正算子, 且 $0 < m \leq A \leq M$, $f(t)$ 是区

间 $[m, M]$ 上的连续凸函数, 则在下列条件 (i) 或 (ii) 成立时, 对每个单位向量 x 有

$$(f(A)x, x) \leq \frac{mf(M) - Mf(m)}{(q-1)(M-m)} \left[\frac{(q-1)(f(M) - f(m))}{q(mf(M) - Mf(m))} \right]^q (Ax, x)^q,$$

其中

$$(i) \quad f(M) > f(m), \quad \frac{f(M)}{M} \geq \frac{f(m)}{m}, \quad q > 1 \text{ 及}$$

$$\frac{f(m)}{m} q \leq \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \leq \frac{f(M)}{M} q;$$

$$(ii) \quad f(M) < f(m), \quad \frac{f(M)}{M} \leq \frac{f(m)}{m}, \quad q < 0 \text{ 及}$$

$$\frac{f(m)}{m} q \leq \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \leq \frac{f(M)}{M} q.$$

证 由于 $f(t)$ 是区间 $[m, M]$ 上的连续凸函数, 故在区间 $[m, M]$ 有

$$f(t) \leq f(m) + \frac{f(M) - f(m)}{M - m}(t - m),$$

从而对 H 中每个单位向量 x 有

$$(f(A)x, x) \leq f(m) + \frac{f(M) - f(m)}{M - m}((Ax, x) - m).$$

令

$$h(t) = \frac{1}{t^q} \left[f(m) + \frac{f(M) - f(m)}{M - m}(t - m) \right],$$

则有

$$\begin{aligned} (f(A)x, x) &\leq (Ax, x)^{-q} \left[f(m) + \frac{f(M) - f(m)}{M - m}((Ax, x) - m) \right] (Ax, x)^q \\ &\leq \max\{h(t) : m \leq t \leq M\} (Ax, x)^q. \end{aligned}$$

应用引理 2.5.1 可知结论成立.

如果 $p \notin [0, 1]$, 则 $f(t) = t^p$ 是区间 $[m, M]$ 上的连续凸函数, 故可应用定理 2.5.3 得

推论 2.5.1 设 A 是 H 上的正算子, 且 $0 < m \leq A \leq M$, 则在下列条件 (i) 或 (ii) 成立时, 对每个单位向量 x 有

$$(A^p x, x) \leq \frac{mM^p - Mm^p}{(q-1)(M-m)} \left[\frac{(q-1)(M^p - m^p)}{q(mM^p - Mm^p)} \right]^q (Ax, x)^q,$$

其中

$$(i) \quad m^{p-1}q \leq \frac{M^p - m^p}{M - m} \leq M^{p-1}q, \quad p > 1, \quad q > 1;$$

$$(ii) \quad m^{p-1}q \leq \frac{M^p - m^p}{M - m} \leq M^{p-1}q, \quad p < 0, \quad q < 0.$$

在上述推论 2.5.1 (i) 中, 令 $p = 2$, q 用 $p+1$ 代替; (ii) 中令 $p = -1$, q 用 $-p$ 代替, 又有

推论 2.5.2 设 A 是 H 上的正算子, 且 $0 < m \leq A \leq M$, $\frac{m}{M} \leq p \leq \frac{M}{m}$, 则对每个单位向量 x 有

$$(1) \quad (Ax, x)^p (A^{-1}x, x) \leq \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \frac{(m+M)^{p+1}}{mM};$$

$$(2) \quad (A^2x, x) \leq \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \frac{(m+M)^{p+1}}{(mM)^p} (Ax, x)^{p+1}.$$

在推论 2.5.1 中, 令 $q = p$, 并应用 Hölder-McCarthy 不等式可得

定理 2.5.4 设 $p > 1$, A 是 H 上的正算子, 且 $0 < m \leq A \leq M$,

$$m^{p-1}p \leq \frac{M^p - m^p}{M - m} \leq M^{p-1}p,$$

则对每个单位向量 x 有

(1) 如果 $p > 1$, 则

$$(Ax, x)^p \leq (A^p x, x) \leq K_+(m, M, p)(Ax, x)^p,$$

其中 $K_+(m, M, p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - Mm^p)^{p-1}};$

(2) 如果 $p < 0$, 则

$$(Ax, x)^p \leq (A^p x, x) \leq K_-(m, M, p)(Ax, x)^p,$$

其中 $K_-(m, M, p) = \frac{mM^p - Mm^p}{(p-1)(M-m)} \left[\frac{(p-1)(M^p - m^p)}{p(mM^p - Mm^p)} \right]^p$.

应用定理 2.5.4, 又有

推论 2.5.3 设 A, B 是 H 上的正算子, 且

$$0 < m_1 \leq A \leq M_1, \quad 0 < m_2 \leq B \leq M_2,$$

p, q 是一对共轭实数即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对每个单位向量 x 和任意实数 s, r ,

(1) 当 $p > 1, q > 1, r \geq 0, s \geq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} (B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x) &\leq (A^s x, x)^{\frac{1}{p}} (B^r x, x)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq K_+ \left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}}, \frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}}, p \right)^{\frac{1}{p}} (B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x); \end{aligned}$$

(2) 当 $p < 0, 0 < q < 1, r \geq 0, s \leq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} (B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x) &\geq (A^s x, x)^{\frac{1}{p}} (B^r x, x)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq K_- \left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}}, \frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}}, p \right)^{\frac{1}{p}} (B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x), \end{aligned}$$

其中 $K_+(, ,), K_-(, ,)$ 如定理 2.5.4 中所定义.

证 (1) 由定理 2.5.4, 对每个向量 x 有

$$(Ax, x) \leq (A^p x, x)^{\frac{1}{p}} (x, x)^{\frac{1}{q}} \leq K_+(m, M, p)^{\frac{1}{p}} (Ax, x). \quad (2.5.1)$$

另一方面又有

$$M_2^{-r} m_1^s \leq m_1^s B^{-r} \leq B^{-\frac{r}{2}} A^s B^{-\frac{r}{2}} \leq M_1^s B^{-r} \leq M_1^s m_2^{-r},$$

由 L-H 不等式有

$$m_1^{\frac{s}{p}} M_2^{-\frac{r}{p}} \leq (B^{-\frac{r}{2}} A^s B^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}} \leq M_1^{\frac{s}{p}} m_2^{-\frac{r}{p}}.$$

在 (2.5.1) 式中, 令 A 为 $(B^{-\frac{r}{2}} A^s B^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}$, x 为 $B^{\frac{r}{2}} x$ 即可得 (1).

(2) 类似 (1) 可证.

作为定理 2.5.4 的另一个应用, 我们来看一下当 $A \geq B > 0$, $p > 1$ 时 A^p 与 B^p 的关系.

引理 2.5.2 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 如果 $t > 1$, 则

(1) $0 \leq (p-1)t - pt^{\frac{1}{q}} + 1$, 且等号成立的充要条件为 $t = 1$;

(2) $\frac{t^{\frac{1}{p}}(t-1)}{t(t^{\frac{1}{p}}-1)} \leq p$, 且等号成立的充要条件为 $t \downarrow 1$;

(3) $\frac{t-1}{(t^{\frac{1}{p}}-1)^{\frac{1}{p}}(t^{\frac{1}{q}}-1)^{\frac{1}{q}}t^{\frac{2}{pq}}} \leq p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}$, 且等号成立的充要条件为

$t \downarrow 1$;

(4) $\frac{(p-1)^{p-1}(t^p-1)^p}{p^p(t-1)(t^p-t)^{p-1}} \leq t^{p-1}$, 且等号成立的充要条件为 $t \downarrow 1$.

证 (1) 令 $f(t) = (p-1)t - pt^{\frac{1}{q}} + 1$, 则 $f(1) = 0$,

$$f'(t) = (p-1)(1 - t^{-\frac{1}{p}}) \geq 0,$$

故结论成立.

(2) 由 (1) 得 $0 \leq (p-1)t - pt^{1-\frac{1}{p}} + 1$, 故

$$0 \leq (p-1)t \cdot t^{\frac{1}{p}} - pt + t^{\frac{1}{p}},$$

即 $(t-1)t^{\frac{1}{p}} \leq pt(t^{\frac{1}{p}}-1)$, 从而 (2) 成立.

(3) 由 (2) 可得.

(4) 在 (3) 中, 把 t 换为 t^p 即可.

定理 2.5.5 设 A, B 是 H 上的正算子, 且 $p \geq 1$, $0 < m_1 \leq A \leq M_1$, $0 < m_2 \leq B \leq M_2$, $0 < B \leq A$, 则

$$(1) B^p \leq K_{2,p} A^p \leq \left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{p-1} A^p;$$

$$(2) \quad B^p \leq K_{1,p} A^p \leq \left(\frac{M_1}{m_1} \right)^{p-1} A^p,$$

其中

$$(i) \quad K_{1,p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(M_1 - m_1)} \frac{(M_1^p - m_1^p)^p}{(m_1 M_1^p - M_1 m_1^p)^{p-1}};$$

$$(ii) \quad K_{2,p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(M_2 - m_2)} \frac{(M_2^p - m_2^p)^p}{(m_2 M_2^p - M_2 m_2^p)^{p-1}}.$$

证 只要考虑 $p > 1$ 的情形. 当 $M \geq m > 0$ 时, 在引理 2.5.2 中,

令 $t = \frac{M}{m} \geq 1$, 则

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(M^p - m^p)^p}{(M - m)(mM^p - Mm^p)^{p-1}} \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{p-1}. \quad (2.5.2)$$

当 $p > 1$ 时, 应用定理 2.5.4, Hölder-McCarthy 不等式及 (2.5.2) 得

$$\begin{aligned} (B^p x, x) &\leq K_{2,p} (Bx, x)^p \leq K_{2,p} (Ax, x)^p \leq K_{2,p} (A^p x, x) \\ &\leq \left(\frac{M_2}{m_2} \right)^{p-1} (A^p x, x). \end{aligned}$$

故 (1) 得证.

又因 $0 < A^{-1} \leq B^{-1}$, 且 $M_1^{-1} \leq A^{-1} \leq m_1^{-1}$, 故应用 (1) 得

$$\begin{aligned} A^{-p} &\leq \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p (m_1^{-1} - M_1^{-1})} \frac{(m_1^{-p} - M_1^{-p})^p}{(M_1^{-1} m_1^{-p} - m_1^{-1} M_1^{-p})^{p-1}} B^{-p} \\ &= \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p (M_1 - m_1)} \frac{(M_1^p - m_1^p)^p}{(m_1 M_1^p - M_1 m_1^p)^{p-1}} B^{-p} \\ &= K_{1,p} B^{-p} \leq \left(\frac{M_1}{m_1} \right)^{p-1} B^{-p}. \end{aligned}$$

定理 2.5.5 蕴含了下面的结果:

推论 2.5.4 设 $0 < B \leq A$ 且 $0 < m \leq B \leq M$. 则对 $p \geq 1$ 有

$$B^p \leq \left(\frac{M}{m} \right)^p A^p.$$

第三章 Furuta 型不等式条件的最优性

3.1 L-H 不等式及 Furuta 不等式的最优性

首先我们指出对任意一个固定的 $\alpha > 1$, $A \geq B \geq 0$ 不能蕴含 $A^\alpha \geq B^\alpha$. 事实上, 令

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $A \geq B \geq 0$, 且

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

其中

$$\lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \mu = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad a = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}, \quad b = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

计算可得

$$A^\alpha - B^\alpha = \begin{pmatrix} a^2 \lambda^\alpha + b^2 \mu^\alpha - 1 & -ab(\lambda^\alpha - \mu^\alpha) \\ -ab(\lambda^\alpha - \mu^\alpha) & b^2 \lambda^\alpha + a^2 \mu^\alpha \end{pmatrix},$$

从而它的行列式的值为 $g(\alpha) = 1 - (b^2 \lambda^\alpha + a^2 \mu^\alpha)$. 由于

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= -(a^2 \mu^{2\alpha} - b^2) \frac{\ln \mu}{\mu^\alpha} \leq -(a^2 \mu^2 - b^2) \frac{\ln \mu}{\mu^\alpha} \\ &= -(5 + 3\sqrt{5}) \frac{\ln \mu}{10\mu^\alpha} < 0, \end{aligned}$$

又 $g(1) = 0$, 故当 $\alpha > 1$ 时, $g(\alpha) < 0$. 因此结论成立.

该结果也可以用反证法证明. 假设对某 $\alpha > 1$ 有

$$A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^\alpha \geq B^\alpha,$$

那么对

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

重复应用假设应有 $A^{\alpha^n} \geq B^{\alpha^n}$. 取 n 使得 $\alpha^n \geq 2$, 则由 L-H 不等式得 $A^2 \geq B^2$, 但是

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

从而 $A^2 - B^2$ 不是正算子.

其次回忆 Furuta 不等式如下:

定理 F (Furuta 不等式) 设 $A \geq B \geq 0$, 则

$$(1) (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}};$$

$$(2) A^{\frac{p+2r}{q}} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$, 且 $(1+2r)q \geq p+2r$.

K. Tanahashi 在 [80] 中证明了 Furuta 不等式条件的最优性, 即下述定理:

定理 3.1.1 设 $0 < p, q, r \in \mathbf{R}$. 如果 $(1+2r)q < p+2r$ 或 $0 < q < 1$, 则存在 $A, B \in L(\mathbf{R}^2)$ 使得 $0 \leq B \leq A$, 但不满足

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}. \quad (3.1.1)$$

证 我们考虑矩阵算子 A, B 如下:

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

和

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad (3.1.3)$$

其中

$$a > 1 > b > 0, \quad \varepsilon, \delta > 0, \quad \varepsilon(1-b) = \delta(a-1). \quad (3.1.4)$$

易见 $0 \leq B \leq A$, 我们只需对某些 $a, b, \varepsilon, \delta$ 有 A, B 不满足 (3.1.1).

令 $\gamma = a - b + \varepsilon - \delta$ 及

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{a-b-\delta} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{a-b-\delta} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma}},$$

其中 $\gamma = a - b + \varepsilon - \delta$. 则 U 是一个酉算子, 而且

$$U^*AU = \begin{pmatrix} a+\varepsilon & 0 \\ 0 & b+\delta \end{pmatrix}.$$

如果 A, B 满足 (3.1.1), 则

$$(U^*A^rUU^*B^pUU^*A^rU)^{\frac{1}{q}} \leq U^*A^{\frac{p+2r}{q}}U.$$

故

$$\gamma^{-\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{q}} \leq \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} \end{pmatrix}, \quad (3.1.5)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= (a+\varepsilon)^{2r}(a-b-\delta+\varepsilon b^p), \\ A_2 &= (b+\delta)^{2r}[\varepsilon+(a-b-\delta)b^p], \\ A_3 &= (a+\varepsilon)^r(b+\delta)^r(1-b^p)\sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)}. \end{aligned}$$

如果令

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}, \\ V &= \frac{1}{\sqrt{A_1-A_2+2\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{A_1-A_2+\varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1} \\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1-A_2+\varepsilon_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$2\varepsilon_1 = -A_1 + A_2 + \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_3^2},$$

则 V 是酉矩阵, 且

$$V^*DV = \begin{pmatrix} A_1 + \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & A_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix},$$

因此由 (3.1.5) 可得

$$\gamma^{-\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} & 0 \\ 0 & (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} B_1 &= (a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1) + (b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \varepsilon_1, \\ B_2 &= (a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \varepsilon_1 + (b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1), \\ B_3 &= \left[(a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} - (b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \right] \sqrt{\varepsilon_1(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \gamma^{\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} - (A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1) \right. \\ &\quad \left. \cdot \begin{pmatrix} (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} & 0 \\ 0 & (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \end{pmatrix} \right| \\ &= (A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1) \left[(a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} (b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1) \gamma^{\frac{2}{q}} \right. \\ &\quad - (a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1) (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad - (b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} \varepsilon_1 (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} - (a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} \varepsilon_1 (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad - (b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1) (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \left. + (A_1 - A_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1) (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1) \left\{ (A_1 - A_2 + \varepsilon_1) \left[(a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[(b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right] + \varepsilon_1 \left[(a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\quad \cdot \left. \left[(b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

由于 $A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1 > 0$, 我们可得下列关键的不等式:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \left[(a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right] \left[(A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} - (b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq (A_1 - A_2 + \varepsilon_1) \left[(a + \varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\quad \cdot \left[(b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \right]. \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

下面估计 (3.1.6) 中每一项关于 ε 及 δ 的阶数. 若用 o 表示 ε 或 δ 的高价无穷小, 则

$$\begin{aligned}
A_1 &= a^{2r}(a-b) \left[1 + \left(\frac{2r}{a} + \frac{b^p}{a-b} \right) \varepsilon - \frac{\delta}{a-b} + o \right], \\
A_2 &= b^{p+2r}(a-b) \left[1 + \frac{\varepsilon}{b^p(a-b)} + \left(\frac{2r}{b} - \frac{1}{a-b} \right) \delta + o \right], \\
A_3^2 &= (ab)^{2r}(a-b)(1-b^p)^2 \varepsilon \\
&\quad \cdot \left[1 + \frac{2r}{a} \varepsilon + \left(\frac{2r}{b} - \frac{1}{a-b} \right) \delta + o \right], \\
\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(A_1 - A_2) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4A_3^2}{(A_1 - A_2)^2}} \right] \\
&= \frac{a^{2r}b^{2r}(1-b^p)^2 \varepsilon}{a^{2r} - b^{p+2r}} \left(1 + \frac{o}{\varepsilon} \right),
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
(b + \delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} &= (a - b)^{\frac{1}{q}} b^{\frac{p+2r}{q}} \left[1 + \frac{\varepsilon}{q(a-b)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{q} \left(\frac{p+2r}{b} - \frac{1}{a-b} \right) \delta + o \right],
\end{aligned}$$

$$(A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} = (a-b)^{\frac{1}{q}} b^{\frac{p+2r}{q}} \left[1 + \frac{2a^{2r} - b^p a^{2r} - b^{2r}}{q(a-b)(a^{2r} - b^{p+2r})} \varepsilon + \frac{1}{q} \left(\frac{2r}{b} - \frac{1}{a-b} \right) \delta + o \right].$$

故

$$\begin{aligned} (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} &= (a-b)^{\frac{1}{q}} b^{\frac{p+2r}{q}} \varepsilon \cdot \left[-\frac{(1-b^p)(a^{2r} - b^{2r})}{q(a-b)(a^{2r} - b^{p+2r})} + \frac{p\delta}{qb\varepsilon} + \frac{o}{\varepsilon} \right], \\ (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} &= (a-b)^{\frac{1}{q}} \left(a^{\frac{p+2r}{q}} - b^{\frac{p+2r}{q}} \right) \left(1 + \frac{o}{\varepsilon} \right), \\ (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} - (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} &= (a-b)^{\frac{1}{q}} \left(a^{\frac{2r}{q}} - b^{\frac{p+2r}{q}} \right) \left(1 + \frac{o}{\varepsilon} \right), \\ (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} &= (a-b)^{\frac{1}{q}} a^{\frac{2r}{q}} (a^{\frac{p}{q}} - 1) \left(1 + \frac{o}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

所以 (3.1.6) 可化为

$$\begin{aligned} &(ab)^{2r} (1-b^p)^2 \left(a^{\frac{p+2r}{q}} - b^{\frac{p+2r}{q}} \right) \left(a^{\frac{2r}{q}} - b^{\frac{p+2r}{q}} \right) \left(1 + \frac{o}{\varepsilon} \right) \\ &\leq a^{\frac{2r}{q}} b^{\frac{p+2r}{q}} (a-b) (a^{2r} - b^{p+2r})^2 \left(a^{\frac{p}{q}} - 1 \right) \\ &\quad \cdot \left[-\frac{(1-b^p)(a^{2r} - b^{2r})}{q(a-b)(a^{2r} - b^{p+2r})} + \frac{p\delta}{qb\varepsilon} + \frac{o}{\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

令 $\delta = \frac{1-b}{a-1} \varepsilon$ 于 (3.1.7) 中, 并令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 得

$$\begin{aligned} &q(1-a^{-1})(1-b^p)^2 \left(1 - a^{-\frac{p+2r}{q}} b^{\frac{p+2r}{q}} \right) \left(1 - a^{-\frac{2r}{q}} b^{\frac{2r+p}{q}} \right) \\ &\leq a^{\frac{2r(q-1)}{q}} b^{\frac{p+2r}{q}} - 2r - 1 (1 - a^{-2r} b^{p+2r}) \left(1 - a^{-\frac{p}{q}} \right) \\ &\quad \cdot \left[p(1-b)(1-a^{-1}b)(1-a^{-2r} b^{p+2r}) \right. \\ &\quad \left. - b(1-b^p)(1-a^{-1})(1-a^{-2r} b^{2r}) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

如果 $0 < q < 1$, 在 (3.1.8) 中令 $a \rightarrow +\infty$, 可得 $0 < q(1-b^p)^2 \leq 0$. 故矛

盾. 如果 $(1+2r)q < p+2r$, 在 (3.1.8) 中令 $b \rightarrow 0^+$, 可得 $0 < q(1-a^{-1}) \leq 0$. 故亦矛盾.

注 如果考虑的空间是复空间, 当 $(1+2r)q < p+2r$ 时, 有下列更简单的例子:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{c(1-c)} e^{i\theta} \\ 2\sqrt{c(1-c)} e^{-i\theta} & 4c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $0 < c < 1$. 然后令酉矩阵 V 为

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c} e^{i\theta} & \sqrt{c} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{1-c} e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

把 A, B 和 V 代入下述式子:

$$((V^*AV)^r V^* B^p V (V^*AV)^r)^{\frac{1}{q}} \leq (V^*AV)^{\frac{p+2r}{q}}.$$

化简后, 令 $c \rightarrow 0^+$, 可得出矛盾.

定理 3.1.1 可叙述为

定理 3.1.1' 设 $p \geq 1, r > 0$. 如果 $\alpha > 1$, 则存在正可逆算子 A, B 使得 $A \geq B > 0$, 但

$$A^{(1+r)\alpha} \not\geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{(1+r)\alpha}{p+r}}.$$

定理 3.1.1'' 设 $p > 0, q > 0, r > 0$, 且 $0 < \delta \leq 1$. 如果 $0 < q < 1$ 或 $(\delta+r)q < p+r$, 则存在正可逆算子 A, B 使得 $A^\delta \geq B^\delta > 0$, 但

$$A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 3.1.1'' 又蕴含下列结果:

定理 3.1.2 设 $p > 0, q > 0, r > 0$. 如果 $r q < p+r$, 则存在正可逆算子 A, B 使得 $\log A \geq \log B$, 但

$$A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 3.1.2 又可叙述为

定理 3.1.2' 设 $p > 0, q > 0, r > 0$. 如果 $\alpha > 1$, 则存在正可逆算子 A, B 使得 $\log A \geq \log B$, 但

$$A^{r\alpha} \not\geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r\alpha}{p+r}}.$$

下面给出 广义 Furuta 不等式的最优性.

定理 3.1.3^{[50],[81],[96]} 设 $p \geq 1, t \in [0, 1], r \geq t$ 及 $s \geq 1$. 如果 $\alpha > 1$, 则存在正可逆算子 A, B 使得 $A \geq B > 0$, 但

$$A^{(1+r-t)\alpha} \not\geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{(1-t+r)\alpha}{(p-t)s+r}}.$$

证 (1) 当 $t \in [0, 1)$ 时, 假设对 $p \geq 1, 0 \leq t < 1, t \leq r, 1 \leq s$ 且 $\alpha > 1$ 有

$$S \geq T > 0 \Rightarrow S^{(1+r-t)\alpha} \geq \left[S^{\frac{r}{2}} \left(S^{\frac{-t}{2}} T^p S^{\frac{-t}{2}} \right)^s S^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{(1-t+r)\alpha}{(p-t)s+r}}, \quad (3.1.9)$$

从而只要 $A \geq B > 0$, 由 Furuta 不等式有

$$S = A^{\frac{1}{1-t}} \geq \left(A^{\frac{t}{2(1-t)}} B^{\frac{p-t}{1-t}} A^{\frac{t}{2(1-t)}} \right)^{\frac{1}{p}} = T.$$

对上述 S, T 应用 (3.1.9) 可知

$$A^{(1+\frac{r}{1-t})\alpha} \geq \left(A^{\frac{r}{2(1-t)}} B^{\frac{(p-t)s}{1-t}} A^{\frac{r}{2(1-t)}} \right)^{\frac{1+\frac{r}{1-t}}{\frac{p-t}{1-t}s+\frac{r}{1-t}}\alpha}.$$

在上式中, 令 $r_2 = \frac{r}{1-t} \geq 0, p_2 = \frac{p-t}{1-t}s \geq 1$, 则

$$A^{(1+r_2)\alpha} \geq \left(A^{\frac{r_2}{2}} B^{p_2} A^{\frac{r_2}{2}} \right)^{\alpha \frac{1+r_2}{p_2+r_2}}$$

对 $p_2 \geq 1, r_2 \geq 0$ 及 $\alpha > 1$ 成立, 此与定理 3.1.1' 矛盾.

(2) 当 $t = 1, p > 1$ 时, 假设对 $1 \leq r, 1 \leq s$ 且 $\alpha > 1$ 有

$$S \geq T > 0 \Rightarrow S^{r\alpha} \geq \left[S^{\frac{r}{2}} \left(S^{\frac{-1}{2}} T^p S^{\frac{-1}{2}} \right)^s S^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{r\alpha}{(p-1)s+r}}. \quad (3.1.10)$$

从而对正算子 A, B , 只要 $\log A \geq \log B$, 就有 (可参见定理 4.2.1)

$$S = A \geq \left(A^{\frac{1}{2}} B^{p-1} A^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} = T.$$

应用 (3.1.10) 可知

$$A^{r\alpha} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^{(p-1)s} A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r\alpha}{(p-1)s+r}}.$$

在上式中, 令 $p_3 = (p-1)s > 0$, 则对 $p_3 > 0, r \geq 1, \alpha > 1$ 有

$$A^{r\alpha} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^{p_3} A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r\alpha}{p_3+r}},$$

此与定理 3.1.2' 矛盾.

(3) 当 $p = t = 1$ 时, 由 L-H 不等式的最优性, 存在 $E \geq F > 0$, 使得 $E^\alpha \not\geq F^\alpha$. 令

$$A = E^{\frac{1}{r}}, \quad B = E^{\frac{1}{2r}} \left(E^{-\frac{1}{2}} F E^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{s}} E^{\frac{1}{2r}},$$

则 $A \geq B > 0$, 但下式不成立:

$$A^{r\alpha} \geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^\alpha.$$

3.2 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间

本节我们证明下列结果:

定理 3.2.1^[112] 设 $-\frac{1}{2} < r < 0, A \geq B > 0$ 和 $F(\alpha) = (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$.

(1) 如果 $p < -2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $\alpha \in [-p-4r, +\infty)$ 及 $(-\infty, p]$ 上单调递减, 并且这两个区间也不能扩大.

(2) 如果 $p > -2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $\alpha \in (-\infty, -p-4r]$ 及 $[p, +\infty)$ 上单调递增, 并且这两个区间也不能扩大.

推论 3.2.1 设 $-\frac{1}{2} < r < 0, A \geq B > 0$ 和 $G(\alpha) = (B^r A^\alpha B^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$.

(1) 如果 $p < -2r$, 那么 $G(\alpha)$ 在 $[-p-4r, +\infty)$ 及 $(-\infty, p]$ 上单调递增.

(2) 如果 $p > -2r$, 那么 $G(\alpha)$ 在 $(-\infty, -p-4r]$ 及 $[p, +\infty)$ 上单调递减.

推论 3.2.2 若 $r > 0$, $p > 0$, $A \geq B > 0$ 和 $F(\alpha) = (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $[p, +\infty)$ 上单调递增, 并且这个区间也不能扩大.

在证明定理之前, 先给出如下引理:

引理 3.2.1 设 $-\frac{1}{2} < r < 0$, $A \geq B > 0$ 和 $F(\alpha) = (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$.

(1) 如果 $p < -2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $[-p-4r, +\infty)$ 及 $(-\infty, p]$ 上单调递减.

(2) 如果 $p > -2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty, -p-4r]$ 及 $[p, +\infty)$ 上单调递增.

证 (1) 对于任意 $\alpha \in [-p-4r, \infty)$ (或 $(-\infty, p]$), 我们只需证明: 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, $F(\alpha) \geq F(\alpha + \varepsilon)$. 事实上, 当 $0 < \varepsilon < \alpha + 2r$ (或 $0 < \varepsilon < p - \alpha < -\alpha - 2r$) 时, 可得

$$0 < \frac{\varepsilon}{\alpha + 2r} < 1, \quad -1 < \frac{p + 2r}{\alpha + 2r + \varepsilon} < 0, \quad \text{且 } -1 < 2r < 0$$

$$\left(\text{或 } -1 < \frac{\varepsilon}{\alpha + 2r} < 0, \quad 0 < \frac{p + 2r}{\alpha + 2r + \varepsilon} < 1, \quad \text{且 } -1 < 2r < 0 \right).$$

因此由降幂引理和 Löwner-Heinz 不等式, 我们可得

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}} \\ &= \left[(A^r B^\alpha A^r)^{\frac{\alpha+2r+\varepsilon}{\alpha+2r}} \right]^{\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}} \\ &= \left[A^r B^{\frac{\alpha}{2}} \left(B^{\frac{\alpha}{2}} A^{2r} B^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}} B^{\frac{\alpha}{2}} A^r \right]^{\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}} \\ &\geq \left[A^r B^{\frac{\alpha}{2}} \left(B^{\frac{\alpha}{2}} B^{2r} B^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}} B^{\frac{\alpha}{2}} A^r \right]^{\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}} \\ &= F(\alpha + \varepsilon). \end{aligned}$$

(2) 对于任意 $\alpha \in (-\infty, -p-4r]$ (或 $[p, +\infty)$), 我们仅需证明: 对

于充分小的 $\varepsilon > 0$, $F(\alpha) \leq F(\alpha + \varepsilon)$. 事实上, 若 $0 < \varepsilon < -\alpha - p - 4r < -\alpha - 2r$ (或 $0 < \varepsilon < \alpha + 2r$), 则

$$-1 < \frac{\varepsilon}{\alpha + 2r} < 0, \quad -1 < \frac{p + 2r}{\alpha + 2r + \varepsilon} < 0, \quad \text{且 } -1 < 2r < 0$$

$$\left(\text{或 } 0 < \frac{\varepsilon}{\alpha + 2r} < 1, \quad 0 < \frac{p + 2r}{\alpha + 2r + \varepsilon} < 1, \quad \text{且 } -1 < 2r < 0 \right).$$

因此, 仿照 (1) 的证明, 我们得到 $F(\alpha) \leq F(\alpha + \varepsilon)$.

引理 3.2.2 令

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b + \varepsilon + \delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

其中 $a > 1 > b > 0$, $\varepsilon, \delta > 0$, 且使 $\varepsilon(1-b) = \delta(a-1)$. 如果 $-\frac{1}{2} < r < 0$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $a^{2r} < b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r} < b^{\alpha_2+2r}$ 和 $F(\alpha) = (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$, 那么

$$F(\alpha_1) \geq F(\alpha_2) \text{ 或 } F(\alpha_1) \leq F(\alpha_2) \quad (3.2.1)$$

蕴含

$$b^p \left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \right) \left[(a^{2r} - b^{2r}) \right. \\ \cdot \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right) \\ \left. + \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \right) \frac{2r}{b} \frac{1-b}{a-1} (a-b) \right] \\ \geq a^{2r} \left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right)^2 \\ \cdot \left(b^{p+2r} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \right) \left(b^{p+2r} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} \right). \quad (3.2.2)$$

证 令

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{a-b-\delta} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{a-b-\delta} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma}},$$

其中 $\gamma = a - b + \varepsilon - \delta$. 则 U 是一个酉算子, 而且

$$U^*AU = \begin{pmatrix} a + \varepsilon & 0 \\ 0 & b + \delta \end{pmatrix}.$$

所以由 (3.2.1) 我们可知

$$\begin{aligned} & \left[(U^*AU)^r (U^*BU)^{\alpha_1} (U^*AU)^r \right]^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \\ & \leq (\text{或} \geq) \left[(U^*AU)^r (U^*BU)^{\alpha_2} (U^*AU)^r \right]^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}, \end{aligned}$$

即

$$\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \leq (\text{或} \geq) \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}, \quad (3.2.3)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= (a + \varepsilon)^{2r} (a - b - \delta + \varepsilon b^{\alpha_1}), \\ A_2 &= (b + \delta)^{2r} [\varepsilon + (a - b - \delta) b^{\alpha_1}], \\ A_3 &= (a + \varepsilon)^r (b + \delta)^r (1 - b^{\alpha_1}) \sqrt{\varepsilon(a - b - \delta)}, \\ \tilde{A}_1 &= (a + \varepsilon)^{2r} (a - b - \delta + \varepsilon b^{\alpha_2}), \\ \tilde{A}_2 &= (b + \delta)^{2r} [\varepsilon + (a - b - \delta) b^{\alpha_2}], \\ \tilde{A}_3 &= (a + \varepsilon)^r (b + \delta)^r (1 - b^{\alpha_2}) \sqrt{\varepsilon(a - b - \delta)}. \end{aligned}$$

当 ε, δ 非常小时, 有 $A_1 < A_2$. 令

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\sqrt{A_2 - A_1 + 2\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_1} & \sqrt{A_2 - A_1 + \varepsilon_1} \\ \sqrt{A_2 - A_1 + \varepsilon_1} & -\sqrt{\varepsilon_1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{V} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + 2\tilde{\varepsilon}_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} & \sqrt{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1} \\ \sqrt{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1} & -\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$2\varepsilon_1 = A_1 - A_2 + \sqrt{(A_2 - A_1)^2 + 4A_3^2},$$

$$2\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \sqrt{(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1)^2 + 4\tilde{A}_3^2}.$$

由 $V^* = V = V^{-1}$, $\tilde{V}^* = \tilde{V} = \tilde{V}^{-1}$ 和 (3.2.3), 我们可得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} &= \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \begin{pmatrix} (A_2 + \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} & 0 \\ 0 & (A_1 - \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \end{pmatrix} \\ &\leq (\text{或} \geq) \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} V^* \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} V \\ &= \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} V \tilde{V} \begin{pmatrix} (\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} & 0 \\ 0 & (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \end{pmatrix} \tilde{V} V \\ &= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$N_1 = \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} (A_2 + \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}},$$

$$N_2 = \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} (A_1 - \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}},$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}}{(A_2 - A_1 + 2\varepsilon_1)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + 2\tilde{\varepsilon}_1)} \left\{ \left[\sqrt{\varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{(A_2 - A_1 + \varepsilon_1)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1)} \right]^2 (\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left[\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1 (A_2 - A_1 + \varepsilon_1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\varepsilon_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1)} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}}{(A_2 - A_1 + 2\varepsilon_1)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + 2\tilde{\varepsilon}_1)} \\ &\quad \cdot \left[\sqrt{\varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}_1} + \sqrt{(A_2 - A_1 + \varepsilon_1)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1(A_2 - A_1 + \varepsilon_1)} - \sqrt{\varepsilon_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1)} \right] \\
& \cdot \left[(\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} - (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \right], \\
M_3 = & \frac{\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}}{(A_2 - A_1 + 2\varepsilon_1)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + 2\tilde{\varepsilon}_1)} \left\{ \left[\sqrt{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1} \right. \right. \\
& + \sqrt{(A_2 - A_1 + \varepsilon_1)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1)} \left. \right]^2 (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \\
& + (\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left[\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1(A_2 - A_1 + \varepsilon_1)} \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{\varepsilon_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1)} \right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

利用 $A_2 - A_1 + \varepsilon_1 > 0$, $\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1 > 0$, 我们可得

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \leq (\geq) \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2 & Q_3 \end{pmatrix}$$

和

$$(Q_1 - P_1)(Q_3 - P_2) \geq Q_2^2, \quad (3.2.4)$$

其中

$$\begin{aligned}
P_1 &= (a - b + \varepsilon - \delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} (1 + \delta_1)(1 + \tilde{\delta}_1)(A_2 + \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}, \\
P_2 &= (a - b + \varepsilon - \delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} (1 + \delta_1)(1 + \tilde{\delta}_1)(A_1 - \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}, \\
Q_1 &= (a - b + \varepsilon - \delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left[\left(1 + \sqrt{\delta_1\tilde{\delta}_1} \right)^2 (\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \right. \\
& \quad \left. + (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left(\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\tilde{\delta}_1} \right)^2 \right], \\
Q_2 &= (a - b + \varepsilon - \delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left(1 + \sqrt{\delta_1\tilde{\delta}_1} \right) \left(\sqrt{\tilde{\delta}_1} - \sqrt{\delta_1} \right) \\
& \quad \left[(\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} - (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \right], \\
Q_3 &= (a - b + \varepsilon - \delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left[\left(1 + \sqrt{\delta_1\tilde{\delta}_1} \right)^2 (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \right. \\
& \quad \left. + (\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left(\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\tilde{\delta}_1} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{A_2 - A_1 + \varepsilon_1}, \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1}.$$

下面我们估计 $\{P_i, Q_j : i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$ 中每一项关于 ε, δ 的阶数. 由于

$$\begin{aligned} A_1 &= a^{2r}(a-b) \left[1 + \left(\frac{2r}{a} + \frac{b^{\alpha_1}}{a-b} \right) \varepsilon - \frac{\delta}{a-b} + o(\varepsilon) \right], \\ A_2 &= b^{\alpha_1+2r}(a-b) \left[1 + \left(\frac{2r}{b} - \frac{1}{a-b} \right) \delta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{b^{\alpha_1}(a-b)} + o(\varepsilon) \right], \\ A_3^2 &= a^{2r}b^{2r}(a-b)(1-b^{\alpha_1})^2 \varepsilon \left[1 + \frac{2r}{a} \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2r}{b} - \frac{1}{a-b} \right) \delta + o(\varepsilon) \right], \\ \varepsilon_1 &= -\frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_1})^2}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \varepsilon \left(1 + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right), \\ \delta_1 &= \frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_1})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_1+2r})^2} \varepsilon + o(\varepsilon), \\ \tilde{\varepsilon}_1 &= -\frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_2})^2}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} \varepsilon \left(1 + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right), \\ \tilde{\delta}_1 &= \frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_2})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_2+2r})^2} \varepsilon + o(\varepsilon), \\ (A_1 - \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} &= a^{2r\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \left\{ 1 + \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \left[\left(\frac{2r}{a} + \frac{b^{\alpha_1}}{a-b} \right) \varepsilon \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\delta}{a-b} + \frac{b^{2r}(1-b^{\alpha_1})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_1+2r})} \varepsilon \right] + o(\varepsilon) \right\}, \\ (A_2 + \varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} &= b^{p+2r}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \left\{ 1 + \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \left[\left(\frac{2r}{b} + \frac{-1}{a-b} \right) \delta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2a^{2r}-a^{2r}b^{\alpha_1}-b^{2r}}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_1+2r})} \varepsilon \right] + o(\varepsilon) \right\}, \\ (\tilde{A}_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} &= a^{2r\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left\{ 1 + \frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \left[\left(\frac{2r}{a} + \frac{b^{\alpha_2}}{a-b} \right) \varepsilon \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\delta}{a-b} + \frac{b^{2r}(1-b^{\alpha_2})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_2+2r})} \varepsilon \right] + o(\varepsilon) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} &= b^{p+2r}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left\{ 1 + \frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \left[\left(\frac{2r}{b} + \frac{-1}{a-b} \right) \delta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2a^{2r} - a^{2r}b^{\alpha_2} - b^{2r}}{(a-b)(a^{2r} - b^{\alpha_2+2r})} \varepsilon \right] + o(\varepsilon) \right\}, \\
(\gamma)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} &= (a-b)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \left(1 - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \frac{\varepsilon - \delta}{a-b} + o(\varepsilon) \right), \\
(\gamma)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} &= (a-b)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \left(1 - \frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \frac{\varepsilon - \delta}{a-b} + o(\varepsilon) \right),
\end{aligned}$$

所以

$$\left\{ \begin{aligned}
P_1 &= b^{p+2r} \left\{ 1 + \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \left[\frac{2r}{b} \delta + \frac{(a^{2r} - b^{2r})(1 - b^{\alpha_1})}{(a-b)(a^{2r} - b^{\alpha_1+2r})} \varepsilon \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(ab)^{2r}}{a-b} \left(\frac{1 - b^{\alpha_1}}{a^{2r} - b^{\alpha_1+2r}} \right)^2 \varepsilon \right. \\
&\quad \left. + \frac{(ab)^{2r}}{a-b} \left(\frac{1 - b^{\alpha_2}}{a^{2r} - b^{\alpha_2+2r}} \right)^2 \varepsilon + o(\varepsilon) \right\}, \\
P_2 &= a^{2r} \left(\frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \right) + o(1), \\
Q_1 &= a^{2r} \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \right) \frac{(ab)^{2r}}{a-b} \left(\frac{1 - b^{\alpha_1}}{a^{2r} - b^{\alpha_1+2r}} - \frac{1 - b^{\alpha_2}}{a^{2r} - b^{\alpha_2+2r}} \right)^2 \varepsilon \\
&\quad + b^{p+2r} \left\{ 1 + \frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \left[\frac{2r}{b} \delta + \frac{(a^{2r} - b^{2r})(1 - b^{\alpha_2})}{(a-b)(a^{2r} - b^{\alpha_2+2r})} \varepsilon \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{(ab)^{2r}}{a-b} \left(\frac{1 - b^{\alpha_1}}{a^{2r} - b^{\alpha_1+2r}} \right) \left(\frac{1 - b^{\alpha_2}}{a^{2r} - b^{\alpha_2+2r}} \right) \varepsilon + o(\varepsilon) \right\}, \\
Q_3 &= a^{2r} \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \right) + o(1), \\
Q_2^2 &= \frac{(ab)^{2r}}{a-b} \left(b^{p+2r} - a^{2r} \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \right) \right)^2 \\
&\quad \cdot \left(\frac{1 - b^{\alpha_1}}{a^{2r} - b^{\alpha_1+2r}} - \frac{1 - b^{\alpha_2}}{a^{2r} - b^{\alpha_2+2r}} \right)^2 \varepsilon + o(\varepsilon).
\end{aligned} \right. \quad (3.2.5)$$

将 (3.2.5) 代入 (3.2.4), 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可得

$$\begin{aligned}
&b^p \left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \right) \left[(a^{2r} - b^{2r}) \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \frac{1 - b^{\alpha_2}}{a^{2r} - b^{\alpha_2+2r}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \frac{1 - b^{\alpha_1}}{a^{2r} - b^{\alpha_1+2r}} \right) + \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \right) \frac{2r}{b} \frac{1-b}{a-1} (a-b) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq a^{2r} \left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right)^2 \\ &\quad \cdot \left[\left(b^{p+2r} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} \right)^2 - b^{p+2r} \left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} \right) \right. \\ &\quad \left. - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} \left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \right) \right]. \end{aligned}$$

因此, (3.2.2) 得证.

注 在引理 3.2.2 中, 用 $a^{2r} \neq b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r} \neq b^{\alpha_2+2r}$ 分别代替 $a^{2r} < b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r} < b^{\alpha_2+2r}$, (3.2.2) 也是正确的. 事实上, 当 $a^{2r} > b^{\alpha_1+2r}$ 或 $a^{2r} > b^{\alpha_2+2r}$ 时, 我们仅需令

$$V = \frac{1}{\sqrt{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1} \\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} \end{pmatrix}$$

或

$$\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + 2\tilde{\varepsilon}_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1} & \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} \\ \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} & -\sqrt{\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \tilde{\varepsilon}_1} \end{pmatrix},$$

仿照引理 3.2.2 的证明即可.

定理 3.2.1 的证明 引理 3.2.1 已经证明了定理的前一部分, 所以我们只需证明后一部分即可.

(1) 当 $p < -2r$ 时, 我们可分两种情况来证明.

(a) 如果存在 α_1, α_2 满足 $-2r < \alpha_1 < \alpha_2 < -p - 4r$, 并且对任意的 $A \geq B > 0$,

$$(A^r B^{\alpha_1} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \geq (A^r B^{\alpha_2} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

由引理 3.2.2, 可得

$$\begin{aligned} &b^p \left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \right) \\ &\quad \left[(a^{2r} - b^{2r}) \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \right) \frac{2r}{b} \frac{1-b}{a-1} (a-b) \right] \end{aligned}$$

$$\geq a^{2r} \left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right)^2 \\ \cdot \left(b^{p+2r} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \right) \left(b^{p+2r} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} \right),$$

其中 $a > 1 > b > 0$, $\varepsilon, \delta > 0$, $\varepsilon(1-b) = \delta(a-1)$, $a^{2r} < b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r} < b^{\alpha_2+2r}$. 由该式知

$$b^p \left(a^{\frac{2r(2r+p)(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_2+2r)(\alpha_1+2r)}} - 1 \right) \left[(a^{2r} - b^{2r}) \right. \\ \cdot \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right) \\ \left. + \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \right) \frac{2r}{b} \frac{1-b}{a-1} (a-b) \right] \\ \geq a^{2r+\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} \left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right)^2 \\ \cdot \left(b^{p+2r} a^{\frac{-2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} - 1 \right) \left(b^{p+2r} a^{\frac{-2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} - 1 \right). \quad (3.2.6)$$

在 (3.2.6) 中令 $a \rightarrow +\infty$, 由 $2r + \frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r} > 0$, 我们得到一个矛盾的结果.

(b) 如果存在 α_1, α_2 满足 $p < \alpha_1 < \alpha_2 < -2r$, 并且对所有的 $A \geq B > 0$,

$$(A^r B^{\alpha_1} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \geq (A^r B^{\alpha_2} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

利用 (3.2.2), 可得

$$b^p \left(a^{\frac{2r(2r+p)(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_2+2r)(\alpha_1+2r)}} - 1 \right) \left[(a^{2r} - b^{2r}) \right. \\ \cdot \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right) \\ \left. + \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \right) \frac{2r}{b} \frac{1-b}{a-1} (a-b) \right] \\ \geq a^{2r-\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right)^2 \\ \cdot \left(b^{p+2r} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} \right) \left(b^{p+2r} - a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} \right). \quad (3.2.7)$$

在 (3.2.7) 中令 $a \rightarrow +\infty$, 而 $2r - \frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r} > 0$, 我们又得到一个矛盾的结果.

(2) 当 $p > -2r$ 时, 我们也可分两种情况来证明.

(a) 如果存在 α_1, α_2 满足 $-p-4r < \alpha_2 < \alpha_1 < -2r$, 并对任意的 $A \geq B > 0$,

$$(A^r B^{\alpha_1} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \geq (A^r B^{\alpha_2} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

通过引理 3.2.2, 也可得到 (3.2.6). 在 (3.2.6) 中令 $a \rightarrow +\infty$, 则

$$2r + \frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r} > 0,$$

我们得到一个矛盾的结果.

(b) 如果存在 α_1, α_2 满足 $-2r < \alpha_2 < \alpha_1 < p$, 并对所有的 $A \geq B > 0$,

$$(A^r B^{\alpha_1} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \geq (A^r B^{\alpha_2} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

由引理 3.2.2, 也可得到 (3.2.7). 在 (3.2.7) 中令 $a \rightarrow +\infty$, 则由

$$2r - \frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r} > 0,$$

我们也得到一个矛盾的结果. 至此, 定理得到证明.

我们知道, 若 $A \geq B > 0$, 则 $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$, 那么由定理 3.2.1 显见推论 3.2.1 成立.

推论 3.2.2 的证明 由定理 F 易见推论的前一部分; 我们只需证明 $[p, +\infty)$ 是最好的.

若 $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < p$, 由引理 3.2.2 和其注, 我们可知 (3.2.2) 也是正确的, 因此可得

$$\begin{aligned} & b^p \left(1 - a^{\frac{2r(2r+p)(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_2+2r)(\alpha_1+2r)}} \right) \left[(a^{2r} - b^{2r}) \right. \\ & \cdot \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} \frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}} \right) \\ & \left. + \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r} \right) \frac{2r}{b} \frac{1-b}{a-1} (a-b) \right] \end{aligned}$$

$$\geq a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} a^{-2r} \left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{1-a^{-2r}b^{\alpha_2+2r}} - \frac{1-b^{\alpha_1}}{1-a^{-2r}b^{\alpha_1+2r}} \right)^2 \cdot \left(b^{p+2r} a^{\frac{-2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} - 1 \right) \left(b^{p+2r} a^{\frac{-2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}} - 1 \right). \quad (3.2.8)$$

在 (3.2.8) 中令 $a \rightarrow +\infty$, 由 $-2r + \frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r} > 0$, 我们得到一个矛盾的结果.

3.3 具有负指数 Furuta 型不等式外部指数的最优性

本节最后, 我们指出利用引理 3.2.2, 可得具有负指数 Furuta 型不等式 (I), (II) 及 (IV) 的外部指数的最优性. (III) 的外部指数是否最优, 目前尚未解决.

(I) 当 $1 \geq p > t > 0$ 且 $p \geq \frac{1}{2}$ 时, 如果存在 $\sigma > 1$ 使得

$$A^{\sigma-t} \geq (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\sigma-t}{p-t}},$$

在 (3.2.2) 式中, 令 $t = -2r$, $\alpha_2 = 0$, $p = \sigma$, $\alpha_1 = p$, 可得

$$\begin{aligned} & b^\sigma \left(a^{\frac{-t(\sigma-t)}{p-t}} - a^{\sigma-t} \right) \left[(a^{-t} - b^{-t}) \frac{(\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t} - b^{p-t})} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\sigma-t}{p-t} + \frac{\sigma-t}{t} \right) \frac{t(1-b)(a-b)}{b(a-1)} \right] \\ & \geq a^{-t} \left(\frac{1-b^p}{a^{-t} - b^{p-t}} \right)^2 (b^{\sigma-t} - a^{\sigma-t}) \\ & \cdot \left(b^{\sigma-t} - a^{-t \frac{\sigma-t}{p-t}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

在 (3.3.1) 中, 令 $b \rightarrow 0^+$, 可得

$$0 \geq a^t a^{\sigma-t} a^{-\frac{t(\sigma-t)}{p-t}}.$$

故矛盾.

(II) 当 $1 \geq t > p \geq 0$ 且 $p \leq \frac{1}{2}$ 时, 如果存在 $\sigma < 0$ 使得

$$A^{\sigma-t} \geq (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\sigma-t}{p-t}},$$

(3.3.1) 式仍成立, 从而有

$$\begin{aligned} & b^\sigma a^{\sigma-t} \left(a^{\frac{-p(\sigma-t)}{p-t}} - 1 \right) \left[(a^{-t} - b^{-t}) \frac{(\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t} - b^{p-t})} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma-t}{p-t} \frac{p(1-b)(a-b)}{b(a-1)} \right] \\ & \geq a^{-t} \left(\frac{1-b^p}{a^{-t} - b^{p-t}} \right)^2 (b^{\sigma-t} - a^{\sigma-t}) \\ & \quad \cdot \left(b^{\sigma-t} - a^{-t \frac{\sigma-t}{p-t}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

在 (3.3.2) 中, 令 $a \rightarrow \infty$, 可得

$$0 \geq \left(\frac{1-b^p}{b^{p-t}} \right)^2 b^{2(\sigma-t)},$$

故亦矛盾.

(IV) 当 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$ 时, 如果存在 $\sigma < 0$ 使得

$$A^{2p-1+\sigma-t} \geq (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}},$$

由 (3.2.2) 则有

$$\begin{aligned} & b^{2p-1+\sigma} \left(a^{\frac{-t(2p-1+\sigma-t)}{p-t}} - a^{2p-1+\sigma-t} \right) \\ & \cdot \left[(a^{-t} - b^{-t}) \frac{(2p-1+\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t} - b^{p-t})} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2p-1+\sigma-t}{p-t} \frac{p(1-b)(a-b)}{b(a-1)} \right] \\ & \geq a^{-t} \left(\frac{1-b^p}{a^{-t} - b^{p-t}} \right)^2 (b^{2p-1+\sigma-t} - a^{2p-1+\sigma-t}) \\ & \quad \cdot \left(b^{2p-1+\sigma-t} - a^{-t \frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}} \right), \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

即

$$\begin{aligned}
& b^{-\sigma} \left(a^{\frac{-t(2p-1+\sigma-t)}{p-t}} - a^{2p-1+\sigma-t} \right) \\
& \cdot \left[b(a^{-t} - b^{-t}) \frac{(2p-1+\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t} - b^{p-t})} \right. \\
& \left. - \frac{2p-1+\sigma-t}{p-t} \frac{p(1-b)(a-b)}{(a-1)} \right] \\
& \geq a^{-t} \left(\frac{1-b^p}{a^{-t}b^{t-p}-1} \right)^2 (1 - b^{-2p+1-\sigma+t} a^{2p-1+\sigma-t}) \\
& \cdot \left(1 - b^{-2p+1-\sigma+t} a^{-t \frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}} \right). \tag{3.3.4}
\end{aligned}$$

在 (3.3.4) 中, 令 $b \rightarrow 0^+$, 可得 $0 \geq a^{-t}$. 故也矛盾.

第四章 Furuta 不等式与 Furuta 型不等式的应用

4.1 Ando 定理

Ando 在 1987 年得到了两个正算子 A, B 的序 $A \geq B$ 的等价条件, 由此可得混序 $\log A \geq \log B$ 的等价定义.

定义 1 设 $f(t)$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数. 如果对任意的 $A \geq B \geq 0$ 都有 $f(A) \geq f(B)$, 则称 f 是 $[0, \infty)$ 上的 **算子单调函数**.

在证明 Ando 定理之前, 先看下列引理:

引理 4.1.1 (F. Hansen)^[61] 设 X 及 A 是 H 上的有界线性算子, 且 $X \geq 0, \|A\| \leq 1, f$ 是 $[0, \infty)$ 上的算子单调函数, 则

$$A^* f(X) A \leq f(A^* X A).$$

证 令 $H \oplus H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in H \right\}$, 并在它上面定义内积

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2),$$

则 $H \oplus H$ 为 Hilbert 空间. 考虑 $H \oplus H$ 上的线性算子

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix},$$

其中 $C = (I - A^* A)^{\frac{1}{2}}, B = (I - A A^*)^{\frac{1}{2}}$. 简单计算表明 U 是酉算子. 若记

$$X_0 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

及对任意的 $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, 令

$$Y = \begin{pmatrix} A^*XA + \varepsilon I & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix},$$

则当 λ 充分大使得 $\lambda I \geq BXB$ 时, 有

$$Y - U^*X_0U = \begin{pmatrix} \varepsilon I & -A^*XB \\ -BXA & 2\lambda - BXB \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \varepsilon I & d \\ d^* & \lambda \end{pmatrix},$$

其中 $d = -A^*XB$. 而当 $\lambda \geq \frac{\|d\|^2}{\varepsilon}$ 时, 对任意的 $\xi, \eta \in H$ 有

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} \varepsilon I & d \\ d^* & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= (\varepsilon\xi + d\eta, \xi) + (d^*\xi + \lambda\eta, \eta) \\ &= \varepsilon\|\xi\|^2 + (d\eta, \xi) + (d^*\xi, \eta) + \lambda\|\eta\|^2 \\ &\geq \varepsilon\|\xi\|^2 - 2\|d\|\|\xi\|\|\eta\| + \lambda\|\eta\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

故当 λ 充分大时必有 $U^*X_0U \leq Y$. 再由 f 的连续性得

$$U^*f(X_0)U = f(U^*X_0U) \leq f(Y),$$

即

$$\begin{pmatrix} A^*f(X)A & A^*f(X)B \\ Bf(X)A & Bf(X)B \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} f(A^*XA + \varepsilon I) & 0 \\ 0 & f(2\lambda) \end{pmatrix}.$$

特别地, 有

$$A^*f(X)A \leq f(A^*XA + \varepsilon I),$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得 $A^*f(X)A \leq f(A^*XA)$.

定理 4.1.1 (Ando)^[8] 设 A, B 是空间 H 上的有界自伴算子, 用 \sharp 表示算子间的几何平均, 则下列断言等价:

- (1) $A \geq B$;
 (2) 对一切 $t \geq 0$, 有 $e^{-tA} \sharp e^{tB} \leq I$;
 (3) $t \mapsto e^{-tA} \sharp e^{tB}$ 是 $[0, \infty)$ 到 $L(H)$ 上的递减映射.

证 令

$$\Phi(t) = e^{-tA} \sharp e^{tB} = e^{-\frac{tA}{2}} \left(e^{\frac{tA}{2}} e^{tB} e^{\frac{tA}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{tA}{2}},$$

则 $\Phi(t)$ 是一个关于 t 在 $t = 0$ 的范数可微映射且 $\Phi(0) = I$. 又因 $\Phi(t) e^{tA} \Phi(t) = e^{tB}$, 故

$$2\Phi'(0) + A = \frac{d}{dt} \{ \Phi(t) e^{tA} \Phi(t) \}_{t=0} = B,$$

从而有

$$\Phi'(0) = -\frac{A-B}{2}. \quad (4.1.1)$$

(1) \Rightarrow (2) 设 $A \geq B$, 对任意正数 ε 有 $A + \varepsilon I - B > 0$ 且

$$e^{-t(A+\varepsilon I)} \sharp e^{tB} = e^{-\frac{t\varepsilon}{2}} \Phi(t).$$

故为证 (2) 我们只要假定 $A > B$ 即可. 此时必存在 $\delta > 0$ 使得 $A - B \geq \delta I$,

由 (4.1.1) 得到 $\Phi'(0) \leq -\frac{\delta}{2}I$. 从而存在充分小的正数 ε_0 使得

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) = I, \quad \forall t \in [0, \varepsilon_0]. \quad (4.1.2)$$

要从 (4.1.2) 推出 (2), 只要证明对任意的 $X, Y > 0$ 有下面的蕴含关系:

$$X \sharp Y \leq I \Rightarrow X^2 \sharp Y^2 \leq X \sharp Y.$$

事实上, 令 $Z_1 = X \sharp Y$, $Z_2 = X^2 \sharp Y^2$, 则

$$Z_1 X^{-1} Z_1 = Y, \quad Z_2 X^{-2} Z_2 = Y^2.$$

由 $0 \leq Z_1 \leq I$ 可知 $0 \leq Z_1^2 \leq I$, 故

$$Z_2 X^{-2} Z_2 = Z_1 X^{-1} Z_1^2 X^{-1} Z_1 \leq Z_1 X^{-2} Z_1.$$

从而 $(X^{-1} Z_2 X^{-1})^2 \leq (X^{-1} Z_1 X^{-1})^2$. 再由 L-H 不等式可得

$$X^{-1} Z_2 X^{-1} \leq X^{-1} Z_1 X^{-1},$$

故 $Z_2 \leq Z_1$.

(2) \Rightarrow (3) 设对一切 $t \geq 0$ 有 $\Phi(t) \leq I$. 取 s 使 $0 < s < t$ 及 $p = \frac{s}{t}$, 则 $0 < p < 1$. 由 $e^{sB} = (\Phi(t)e^{tA}\Phi(t))^p$, 注意到 $f(\lambda) = \lambda^p$ 是 $[0, \infty)$ 上的算子单调函数及 $0 \leq \Phi(t) \leq I$, 由引理 4.1.1 可得

$$(\Phi(t)e^{tA}\Phi(t))^p \geq \Phi(t)(e^{tA})^p\Phi(t) = \Phi(t)e^{sA}\Phi(t).$$

从而 $e^{sB} \geq \Phi(t)e^{sA}\Phi(t)$, 进而 $\Phi(s)e^{sA}\Phi(s) = e^{sB} \geq \Phi(t)e^{sA}\Phi(t)$. 故

$$\left(e^{\frac{sA}{2}}\Phi(s)e^{\frac{sA}{2}}\right)^2 \geq \left(e^{\frac{sA}{2}}\Phi(t)e^{\frac{sA}{2}}\right)^2.$$

易见 $\Phi(s) \geq \Phi(t)$.

(3) \Rightarrow (1) 因为 $\Phi(t)$ 是 $[0, \infty)$ 上的递减函数, 故 $\Phi'(0) \leq 0$. 由 (4.1.1) 知 $A \geq B$.

从定理 4.1.1 的证明可以知道:

推论 4.1.1 定理 4.1.1 中的条件 (2), (3) 可分别换为下面的 (2a), (3a) 或 (2b), (3b):

(2a) 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对一切 $t \in [0, \varepsilon]$ 有 $e^{-tA} \sharp e^{tB} \leq I$;

(3a) 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $t \mapsto e^{-tA} \sharp e^{tB}$ 是 $[0, \varepsilon]$ 到 $L(H)$ 上的递减映射;

(2b) 对一切 $t \geq 0$ 有 $e^{tA} \sharp e^{-tB} \geq I$;

(3b) $t \mapsto e^{tA} \sharp e^{-tB}$ 是 $[0, \infty)$ 到 $L(H)$ 上的递增映射.

推论 4.1.2 设 $A \gg B > 0$, 即 $\log A \geq \log B$. 则

(1) $t \mapsto A^{-t} \sharp B^t$ (或 $A^t \sharp B^{-t}$) 是 $[0, \infty)$ 上的递减 (或递增) 函数;

(2) $(A^{\frac{t}{2}} B^t A^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{2}} \leq A^t$.

利用可逆算子间的算术 - 几何 - 调和不等式:

$$\frac{X+Y}{2} \geq X \sharp Y \geq \left(\frac{X^{-1} + Y^{-1}}{2} \right)^{-1},$$

易得下列推论:

推论 4.1.3 设 $A > B > 0$, 则对一切 $t \geq 0$ 有 $\frac{e^{tA} + e^{-tB}}{2} \geq I$.

定理 4.1.2 设 $f(\lambda)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的可微递增凸函数, 则对 H 上的两个自伴算子 A, B , 只要 $A \geq B$, 就有函数 $t \mapsto f(tA) + f(-tB)$ 是 $[0, \infty)$ 到 $L(H)$ 上的递增映射.

证 令 $\psi(t) = f(tA) + f(-tB)$, 则 $\psi(t)$ 也是凸的. 故对一切 $t \geq 0$ 有

$$\psi'(t) \geq \psi'(0) = (A - B)f'(0).$$

再由 $f(\lambda)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的递增函数知 $\psi'(t) \geq 0$, 故结论成立.

4.2 Furuta 不等式应用于 Ando 定理 和算子的广义相对熵

由推论 4.1.2, 我们有下列定理 4.2.A.

定理 4.2.A 对可逆正算子 A, B , 下列结果等价:

- (1) $A \gg B$;
- (2) 对一切 $p \geq 0$ 有 $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}}$;
- (3) $G(p) = A^{-p} \sharp B^p$ 是 $[0, \infty)$ 上的递减函数.

除了几何平均以外, 算子间一般的平均的定义由 Kubo 和 Ando [71] 引入.

定义 2 一个正算子间的二元运算 m 称为一个平均, 若它满足:

- (1) m 是上半连续的, 即当 $A_n \downarrow A$ 及 $B_n \downarrow B$ 时, 有 $A_n m B_n \rightarrow AmB$;
- (2) $A \leq C$ 且 $B \leq D$ 蕴含 $AmB \leq CmD$;
- (3) 对一切有界线性算子 T , $T^*(AmB)T \leq (T^*AT)m(T^*BT)$.

注 当 T 可逆时, (3) 中的不等式可用等式代替. 在 [71] 中, 每个算子单调函数对应一个平均, 故相应于算子单调函数 x^s ($0 \leq s \leq 1$) 存在唯一的平均 m_s , 使对一切正算子 A 有 $Im_s A = A^s$. 当 $s = \frac{1}{2}$ 时, $m_{\frac{1}{2}}$ 是几何平均 \sharp .

如果对 $p \geq 1, s \geq 0$ 令 $m_{(p,s)} = m_{\frac{1+s}{p+s}}$, 那么利用平均的记号 Furuta 型算子单调函数可写成:

定理 4.2.B 若 $A \geq B \geq 0$, 则

$$M(p, r) = B^{-2r} m_{(p, 2r)} A^p = B^{-r} (B^r A^p B^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}} B^{-r}$$

是单调增函数, 即

$$M(p+t, r+s) \geq M(p, r),$$

其中 $p \geq 1$ 及 $r, s, t \geq 0$. 特别地,

$$M(p, r) = B^{-2r} m_{(p, 2r)} A^p \geq M(1, 0) = A \geq B,$$

$$N(p, r) = A^{-2r} m_{(p, 2r)} B^p \leq M(0, 1) = B \leq A.$$

下面我们讨论混序情形的算子平均构成的算子单调函数, 为此先给出混序时的 Furuta 型不等式.

定理 4.2.1^[43] 设 $A \gg B$, 则对 $p, r \geq 0$ 有

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{2r}{p+2r}} \geq B^{2r}, \quad A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}}.$$

证 首先由降幂引理知, 对一切 $p \geq 0$ 及 $r \geq 0$ 有

$$A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}} \Leftrightarrow \left(B^{\frac{p}{2}} A^{2r} B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p}{p+2r}} \geq B^p. \quad (4.2.1)$$

事实上, $A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}}$ 等价于

$$A^{2r} \geq A^r B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{2r} B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{-p}{p+2r}} B^{\frac{p}{2}} A^r.$$

令 $C = A^p, D = \left(A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$, 由定理 4.2.A 知 $A \gg B$, 则 $C \geq D \geq 0$, 再利用 Furuta 不等式, 对一切 $a \geq 1$ 和 $t \geq 0$ 知

$$C \geq C^{-t} (C^t D^a C^t)^{\frac{1+2t}{a+2t}} C^{-t},$$

即

$$A^{p(1+2t)} \geq \left[A^{pt} \left(A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{a}{2}} A^{pt} \right]^{\frac{1+2t}{a+2t}}.$$

令 $a = 2$, 得

$$A^{p(1+2t)} \geq \left(A^{p(t+\frac{1}{2})} B^p A^{p(t+\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1+2t}{2+2t}}.$$

令 $r = p \left(t + \frac{1}{2} \right)$, 则 $\frac{1+2t}{2(1+t)} = \frac{2r}{p+2r}$ 及 $r \geq \frac{p}{2}$, 故对一切 $2r \geq p \geq 0$,

$$A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}}.$$

另一方面, 由 $A \gg B$ 知, 对一切 $p \geq 0$ 有

$$A^p \geq \left(A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由 (4.2.1), 它又等价于对一切 $p \geq 0$ 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}} A^p B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \geq B^p,$$

现令 $E = \left(B^{\frac{p}{2}} A^p B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$ 及 $F = B^p$. 再利用 Furuta 不等式, 对所有 $a \geq 1, t \geq 0$ 有

$$F^{-2t} m_{(a, 2t)} E^a \geq F,$$

即

$$\left[B^{pt} \left(B^{\frac{p}{2}} A^p B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{a}{2}} B^{pt} \right]^{\frac{1+2t}{a+2t}} \geq B^{p(1+2t)}.$$

令 $a = 2$, 对所有 $t \geq 0$, 得

$$\left(B^{p(t+\frac{1}{2})} A^p B^{p(t+\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1+2t}{2+2t}} \geq B^{p(1+2t)}.$$

令 $q = p \left(t + \frac{1}{2} \right)$, 则 $\frac{1+2t}{2+2t} = \frac{2q}{p+2q}$, 及对所有 $2q \geq p \geq 0$ 有

$$(B^q A^p B^q)^{\frac{2q}{p+2q}} \geq B^{2q}.$$

再由 (4.2.1), 它等价于

$$A^p \geq \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2q} A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p}{p+2q}}, \quad \text{对所有 } 2q \geq p \geq 0.$$

现在记 p 为 $2r$, 记 $2q$ 为 p , 则

$$A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}}, \quad \text{对所有 } p \geq 2r \geq 0.$$

故对一切 $p \geq 0$ 及一切 $r \geq 0$, 有

$$A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}},$$

从而亦有 (对 $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$ 应用上式)

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{2r}{p+2r}} \geq B^{2r}.$$

推论 4.2.1 若 $A \gg B$, 则

(1) 对一个给定的 $r \geq 0$, 有

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{s}{p+2r}} \geq B^s, \quad \text{对 } p \geq 0 \text{ 及 } 2r \geq s \geq 0;$$

(2) 对一个给定的 $p \geq 0$, 有

$$A^s \geq \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{s}{p+2r}}, \quad \text{对所有 } r \geq 0 \text{ 及 } p \geq s \geq 0.$$

下面我们利用推论 4.2.1 给出 Ando 定理的一个推广.

对所有 $p \geq t \geq 0$ 及 $s \geq 0$, 记 $m_{(p,s,t)} = m_{\frac{(t+s)}{(p+s)}}$. 显然,

$$m_{(p,s,1)} = m_{(p,s)} = m_{\frac{1+s}{p+s}}.$$

定理 4.2.2 设 $A \gg B$, 则对一个给定的 $t \geq 0$, 有

$$M_t(p, r) = B^{-2r} m_{(p, 2r, t)} A^p = B^{-r} (B^r A^p B^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}} B^{-r},$$

对 $p \geq t$ 及 $r \geq 0$ 是单调增加的.

证 首先对每个 $r > 0$ 及 $p \geq t$, 有

$$M_t(p+s, r) \geq M_t(p, r), \quad \text{对 } p \geq s \geq 0.$$

令 $m = m_{(p+s, 2r, t)}$, 由推论 4.2.1 (2) 及 $X^\alpha m_s X^\beta = X^{\alpha+(\beta-\alpha)s}$ 知

$$\begin{aligned}
M_t(p+s, r) &= B^{-2r} m A^{p+s} \\
&= A^{\frac{p}{2}} \left[\left(A^{-\frac{p}{2}} B^{-2r} A^{-\frac{p}{2}} \right) m A^s \right] A^{\frac{p}{2}} \\
&\geq A^{\frac{p}{2}} \left[\left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{-1} m \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{s}{p+2r}} \right] A^{\frac{p}{2}} \\
&= A^{\frac{p}{2}} \left\{ \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{s}{p+2r}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{t+2r}{p+s+2r}} \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} A^{\frac{p}{2}} \\
&= A^{\frac{p}{2}} \left(A^{-\frac{p}{2}} B^{-2r} A^{-\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p-t}{p+2r}} A^{\frac{p}{2}} \\
&= A^p m_{\frac{p-t}{p+2r}} B^{-2r} = B^{-2r} m_{(p, 2r, t)} A^p \\
&= M_t(p, r).
\end{aligned}$$

下一步, 我们证明 r 的单调性.

若 $0 \leq s \leq 2r$, 令 $m = m(p, 2r+s, t)$, 利用推论 4.2.1 (1) 可得

$$\begin{aligned}
M_t\left(p, r + \frac{s}{2}\right) &= B^{-2r-s} m A^p \\
&= B^{-r} (B^{-s} m (B^r A^p B^r)) B^{-r} \\
&\geq B^{-r} \left[(B^r A^p B^r)^{-\frac{s}{p+2r}} m (B^r A^p B^r) \right] B^{-r} \\
&= B^{-r} (B^r A^p B^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}} B^{-r} \\
&= M_t(p, r).
\end{aligned}$$

作为定理 4.2.2 的一个直接结果, 由定理 4.2.A 可推广为

定理 4.2.3 对正可逆算子 A 和 B , 下列条件等价:

- (1) $A \gg B$;
- (2) 对每个固定的 $t \geq 0$, $M_t(p, r) \geq A^t$, 其中 $r \geq 0$, $p \geq t$;
- (3) 对每个固定的 $t \geq 0$, $M_t(p, r)$ 是 $r \geq 0$ 及 $p \geq t$ 上关于 r, p 的单调增函数.

证 (1) \Rightarrow (3) 由定理 4.2.2 可得.

(3) \Rightarrow (2) 显见, 因 $M_t(p, 0) = A^t$.

(2) \Rightarrow (1) 在 (2) 中令 $t = 0$ 及 $2r = p$, 则 $(B^{\frac{p}{2}} A^p B^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq B^p$. 由定理 4.2.A 知 $A \gg B$.

注 在定理 4.2.3 中, 令 $t = 1$, 得 Furuta 不等式的推广:

推论 4.2.2 设 $A \gg B$, 则当 $p \geq 1, r \geq 0$ 时,

$$M(p, r) = B^{-2r} m_{(p, 2r)} A^p \geq A,$$

即

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}} \geq B^r A B^r.$$

定理 4.2.3 又可写成下列形式, 并可直接证明如下:

推论 4.2.3 对正可逆算子 A 和 B , 下列条件等价:

(1) $A \gg B$;

(2) 对每个固定的 $t \geq 0$, $F(p, r) = B^{-\frac{r}{2}} (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}} B^{-\frac{r}{2}}$ 是 $r \geq 0$ 及 $p \geq t$ 上的关于 r, p 的单调增函数;

(3) 对每个固定的 $t \geq 0$, $G(p, r) = A^{-\frac{r}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}}$ 是 $r \geq 0$ 及 $p \geq t$ 上关于 r, p 的单调减函数.

证 (1) \Rightarrow (3) 由 $A \gg B$ 知, 对 $p, r \geq 0$ 有

$$A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}.$$

再由降幂引理, 对 $p, r \geq 0$ 有

$$B^p \leq (B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}.$$

故应用 L-H 不等式, 对 $r \geq 0, 0 \leq w \leq p, 0 \leq u \leq r$ 有

$$B^w \leq (B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}})^{\frac{w}{p+r}} \quad (4.2.2)$$

和

$$A^u \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{u}{p+r}}. \quad (4.2.3)$$

故由 (4.2.2) 知

$$\begin{aligned}
 g(p, r) &= \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{t+r}{p+r}} \\
 &= \left[\left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{p+w+r}{p+r}} \right]^{\frac{t+r}{p+w+r}} \\
 &= \left[A^{\frac{r}{2}} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{w}{p+r}} B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{t+r}{p+w+r}} \\
 &\geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^{p+w} A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{t+r}{p+w+r}} \\
 &= g(p+w, r).
 \end{aligned}$$

因此, $G(p, r) = A^{-\frac{r}{2}} g(p, r) A^{-\frac{r}{2}}$ 也是 p 的下降函数. 再由 (4.2.3) 得

$$\begin{aligned}
 G(p, r) &= A^{-\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{t+r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}} \\
 &= B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{t-p}{p+r}} B^{\frac{p}{2}} \\
 &= B^{\frac{p}{2}} \left[\left(B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{r+u+p}{p+r}} \right]^{\frac{t-p}{p+u+r}} B^{\frac{p}{2}} \\
 &= B^{\frac{p}{2}} \left[B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{u}{p+r}} A^{\frac{r}{2}} B^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{t-p}{p+u+r}} B^{\frac{p}{2}} \\
 &\geq B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{r+u} B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{t-p}{p+u+r}} B^{\frac{p}{2}} \\
 &= G(p, r+u).
 \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (1) 令 $t=0$, 对任意 $p, r \geq 0$ 有

$$I \geq A^{-\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}},$$

即对 $p, r \geq 0$ 有

$$A^r \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r}{p+r}}.$$

由定理 4.2.1 可得 $A \gg B$.

对 $B^{-1} \gg A^{-1}$ 应用 (1) \Leftrightarrow (3), 可知 (1) \Leftrightarrow (2) 亦成立.

例 1 当 $A \gg B$ 时, Furuta 不等式 $B^{-2r} m_{(p, 2r)} A^p \geq B$ 不一定成立. 如对

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

有

$$A^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{\frac{1}{2}}.$$

故 $A \not\geq B$, 但 $A \gg B$. 但当 $p = 1 = 2r$ 时, $B^{-2r} m_{(p, 2r)} A^p \geq B$ 退化为 $A \geq B$.

问题 如果存在 $t > 0$ 使对 $r \geq 0$ 及 $p \geq t$ 有 $M(p, r) \geq A^t$, 则是否有 $A \gg B$?

对两个正可逆算子 A, B , 其相对算子熵定义为

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}}.$$

利用定理 4.2.1 易见有下列结果:

定理 4.2.4 [50] 设 A, B, C 是三个正可逆算子, 则下列条件等价:

- (1) $C \gg A \gg B$;
- (2) 对一切 $p \geq 0, u \geq 0$, 有

$$\left(A^{\frac{u}{2}} C^p A^{\frac{u}{2}} \right)^{\frac{u}{p+u}} \geq A^u \geq \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}} \right)^{\frac{u}{p+u}};$$

- (3) 对固定的 $p_0 > 0, u_0 > 0$ 及任意的 $u \in [0, u_0]$, 有

$$\left(A^{\frac{u}{2}} C^{p_0} A^{\frac{u}{2}} \right)^{\frac{u}{p_0+u}} \geq A^u \geq \left(A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}} \right)^{\frac{u}{p_0+u}};$$

- (4) 对一切 $p \geq 0, u \geq 0$, 有

$$\log \left(A^{\frac{u}{2}} C^p A^{\frac{u}{2}} \right) \geq \log A^{p+u} \geq \log \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}} \right);$$

- (5) 对固定的 $p_0 > 0, u_0 > 0$ 及任意的 $u \in [0, u_0]$, 有

$$\log \left(A^{\frac{u}{2}} C^{p_0} A^{\frac{u}{2}} \right) \geq \log A^{p_0+u} \geq \log \left(A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}} \right);$$

- (6) 对一切 $p \geq 0, u \geq 0$, 有

$$S(A^{-u}|C^p) \geq S(A^{-u}|A^p) \geq S(A^{-u}|B^p);$$

(7) 对固定的 $p_0 > 0$, $u_0 > 0$ 及任意的 $u \in [0, u_0]$, 有

$$S(A^{-u}|C^{p_0}) \geq S(A^{-u}|A^{p_0}) \geq S(A^{-u}|B^{p_0}).$$

关于两个算子的相对熵还有下列估计:

定理 4.2.5 设 A, B 是两个正可逆算子, 对任意正数 x_0 , 下列不等式成立:

$$(\log x_0 - 1)A + \frac{B}{x_0} \geq S(A|B) \geq (1 - \log x_0)A - \frac{AB^{-1}A}{x_0}.$$

特别地, $S(A|B) = 0$ 当且仅当 $A = B$.

证 因为对任意两个正数 x, x_0 , 有

$$\log x_0 - 1 + \frac{x}{x_0} \geq \log x \geq 1 - \log x_0 - \frac{1}{xx_0},$$

故

$$\begin{aligned} \log x_0 - 1 + \frac{1}{x_0} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) \\ \geq \log \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) \\ \geq 1 - \log x_0 - \frac{1}{x_0} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

两边同乘以 $A^{\frac{1}{2}}$ 可知结论成立. 在上式中令 $x_0 = 1$, $S(A|B) = 0$, 可得 $A = B$.

4.3 Furuta 不等式应用于算子的保序不等式

Furuta 已经证明: 如果 $A \geq B > 0$, 那么对任意 $r \geq 0$,

$$F(p) = \left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1+r}{p+r}}$$

关于 $p \geq 1$ 是单调递增的. 但他指出这个结果在 $0 \leq p \leq 1$ 且 $r \geq 0$ 时并不成立. 本节则给出

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

成立的充分必要条件. 运用类似的方法, 本节给出在 $p \in [0, 1]$ 条件下的某些算子不等式 and 一类算子函数的单调性 (可参见 [98]).

定理 4.3.1 如果 $-1 < r \leq -\frac{1}{2}$, $0 \leq \alpha_2 < -r$, $A_1 \geq A_2 \geq B > 0$, 且 $\max\left\{-r, \frac{\alpha_2+1}{2}\right\} \leq \alpha_1 \leq 1$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A_1^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A_2^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}}.$$

定理 4.3.2 如果 $A \geq B > 0$, $-1 \leq r \leq -\frac{1}{2}$, $0 \leq \alpha_2 \leq -1-2r$, 且 $\alpha_2 \leq \alpha_1 < -r$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}}.$$

定理 4.3.3 如果 $A \geq B > 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}$$

在以下任何一个条件成立时成立:

- (i) $0 \leq -r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \frac{1-2r}{3}$ 且 $\frac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1$;
- (ii) $0 \leq -1-2r \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 < -r \leq 1$;
- (iii) $0 \leq -r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \min\left\{\frac{1}{2}, -2r\right\}$.

定理 4.3.4 (1) 如果 $A \geq B > 0$, 且 $0 \leq \alpha_1 < -r \leq \frac{\alpha_2}{2} \leq \frac{1}{4}$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_2+r}}.$$

(2) 如果 $A \geq B > 0$, $0 \leq -r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, 且 $-2r < \alpha_2$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_2+r}}.$$

定理 4.3.5 (1) 如果 $-1 \leq r \leq 0$, $\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1-2r}{3}\right\} \leq \alpha_2 \leq \frac{1-r}{2}$, $-r < \alpha_1 \leq \alpha_2$, 且 $A \geq B > 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

(2) 如果 $\frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1$, $2\alpha_2 - 1 \leq \alpha_1 \leq \frac{3\alpha_2 - 1}{2}$, $\alpha_1 < -r < \alpha_2$, 且 $A \geq B > 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

推论 4.3.1 (1) 如果 $A \geq B > 0$, 且 $-\frac{1}{4} < r \leq 0$, 那么 $F(\alpha) = \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha+r}}$ 关于 $\alpha \in \left[-2r, \frac{1}{2}\right]$ 是递增的.

(2) 如果 $A \geq B > 0$, 且 $-1 \leq r \leq -\frac{1}{2}$, 那么 $G(\alpha) = \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha+r}}$ 关于 $\alpha \in [0, -1-2r]$ 是递减的.

主要结果的证明需要下列结果:

引理 4.3.A^[43] 如果 $A > 0$, B 可逆, 那么

$$(BAB^*)^s = BA^{\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{1}{2}} B^* B A^{\frac{1}{2}}\right)^{s-1} A^{\frac{1}{2}} B^* \quad (*)$$

对任意实数 s 都成立.

定理 4.3.B^{[29],[69],[82],[116]} 如果 $A \geq B \geq 0$, 且 $A > 0$, 那么下列结论成立 (如图 4-1):

(I) 若 $1 \geq p > t \geq 0$ 且 $p \geq \frac{1}{2}$, 则

$$A^{1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{1-t}{p-t}};$$

(II) 若 $1 \geq t > p \geq 0$ 且 $\frac{1}{2} \geq p$, 则

$$A^{-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{-t}{p-t}};$$

(III) 若 $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$, 则

$$A^{2p-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{2p-t}{p-t}};$$

(IV) 若 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$, 则

$$A^{2p-1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}}.$$

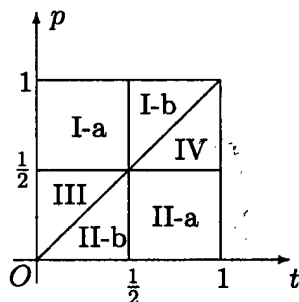


图 4-1 示意图

[30],[31] 中已给出定理 4.3.B 的推广. 在 [53],[54] 中给出定理 4.3.B 中 (I), (II), (III) 和 (IV) 的等价关系. 在 [82] 中给出定理 4.3.B 中 (I), (II) 和 (IV) 中指数的最优性的证明.

定理 4.3.1 的证明 因为 $\frac{1}{2} \leq -r < 1$, $0 \leq \alpha_2 < -r$, 且 $A_2 \geq B > 0$, 由定理 4.3.B (I) 可知

$$A_2^{1-\alpha_2} \geq \left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}. \quad (4.3.1)$$

另一方面, 因为 $\frac{1}{2} \leq \alpha_1 \leq 1$, $0 \leq \alpha_2 < \alpha_1$, 且 $A_2^{-1} \geq A_1^{-1} > 0$, 由定理 4.3.B (I) 可知

$$\left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}} \geq A_2^{1-\alpha_2}. \quad (4.3.2)$$

令

$$X = \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+r}}, \quad Y = \left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_1-\alpha_2}},$$

由 (4.3.1) 和 (4.3.2), 得

$$Y \leq A_2^{\alpha_2-1} \leq X. \quad (4.3.3)$$

令 $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2 - 1}$, $\tilde{r} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_2}$. 那么 $\frac{1}{2} \leq \tilde{r} \leq 1$, 且 $0 \leq \tilde{\alpha} < \tilde{r}$. 由定理

4.3.B (I) 和 (4.3.3), 可得

$$X^{1-\tilde{\alpha}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{\alpha}}{2}} Y^{\tilde{r}} X^{\frac{-\tilde{\alpha}}{2}} \right)^{\frac{1-\tilde{\alpha}}{\tilde{r}-\tilde{\alpha}}}.$$

因为 $\frac{1-\tilde{\alpha}}{\tilde{r}-\tilde{\alpha}} = \frac{1+r}{\alpha_1+r}$, 所以

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} \right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \geq X^{\frac{1+r}{\alpha_2-1}}. \quad (4.3.4)$$

重复运用引理 4.3.A 和 (4.3.4), 得到以下结果:

$$\begin{aligned} & \left(B^{\frac{r}{2}} A_1^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \\ &= B^{\frac{r}{2}} A_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \left(A_1^{\frac{\alpha_1}{2}} B^r A_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1+r}} A_1^{\frac{\alpha_1}{2}} B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}} A_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \left[A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-r} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right) A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}} \right]^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1+r}} A_1^{\frac{\alpha_1}{2}} B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-r} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-r} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{-\alpha_1} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-r} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-r} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} \right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \\ &\quad \cdot \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{\frac{r}{2}} \\ &\geq B^{\frac{r}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} X^{\frac{1+r}{\alpha_2-1}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{r}{2}} A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}} - 1 A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{\frac{r}{2}} \\ &= \left(B^{\frac{r}{2}} A_2^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}}. \end{aligned}$$

由定理 4.3.1 的证明我们得到前面的比较引理:

比较引理 令 $A > 0$, $B > 0$, 且 $\beta, r, \alpha_1, \alpha_2$ 为满足下列条件的任意实数: $\alpha_1 + r \neq 0$, $\alpha_2 + r \neq 0$. 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.$$

引理 4.3.1 如果 $A \geq B > 0$, 那么对 $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, 且 $-r < \alpha \leq 0$,

$$\left(A^{\frac{r}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-r}{\alpha+r}} \geq A^{1-r}.$$

证 若 $\frac{1}{2} \leq -\alpha$, 则由定理 4.3.B (IV) 可知

$$A^{-2\alpha-1-r} \geq \left(A^{\frac{-r}{2}} B^{-\alpha} A^{\frac{-r}{2}}\right)^{\frac{-2\alpha-1-r}{-\alpha-r}} = \left(A^{\frac{r}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-2\alpha-1-r}{\alpha+r}}.$$

因为 $\frac{1-r}{2\alpha+1+r} \in [0, 1]$, 由 L-H 不等式可知

$$A^{-(1-r)} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-(1-r)}{\alpha+r}}.$$

若 $0 \leq -\alpha \leq \frac{1}{2}$, 则由定理 4.3.B (II) 可知

$$A^{-r} \geq \left(A^{\frac{-r}{2}} B^{-\alpha} A^{\frac{-r}{2}}\right)^{\frac{-r}{-\alpha-r}} = \left(A^{\frac{r}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-r}{\alpha+r}}.$$

因为 $\frac{1-r}{r} \in [0, 1]$, 由 L-H 不等式可得

$$A^{-(1-r)} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-(1-r)}{\alpha+r}}$$

引理 4.3.1 得证.

定理 4.3.2 的证明 因为 $\frac{1}{2} \leq -r \leq 1$, $0 \leq \alpha_2 < -r$, 由定理 4.3.B (I) 可知

$$A^{1-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令 $X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+r}}$, $Y = A^{\alpha_2-1}$, 则 $Y \leq X$. 令

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2 - 1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - 1},$$

可得 $\frac{1}{2} \leq \tilde{r} \leq 1$, 且 $-\tilde{r} < \tilde{\alpha} \leq 0$. 由引理 4.3.1 可得

$$\left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}} \geq X^{1-\tilde{r}},$$

即

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} \right)^{\frac{-(1+r)}{\alpha_1+r}} \geq X^{\frac{-(1+r)}{\alpha_2-1}}. \quad (4.3.5)$$

因为 (4.3.5) 等价于

$$\begin{aligned} & \left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{-(1+r)}{\alpha_1+r}} \\ & \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-(1+r)}{\alpha_2+r}}, \end{aligned}$$

由比较引理可知定理 4.3.2 得证.

定理 4.3.3 的证明 (1) 假设条件 (i) 成立. 由 $\frac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1$, $-\alpha_2 < r \leq 0$ 及引理 4.3.1 可得

$$\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}} \geq A^{1-\alpha_2}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{1-\alpha_2},$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_2}, \quad \tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{1 - \alpha_2}.$$

我们可知 $X \geq Y$, 且 $0 \leq -\tilde{\alpha} < \tilde{r} \leq \frac{1}{2}$. 再由定理 4.3.B (II) 得

$$X^{-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}. \quad (4.3.6)$$

故由比较引理, 得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}.$$

(2) 假设条件 (ii) 成立. 因为 $\frac{1}{2} \leq -r < 1$, $0 \leq \alpha_2 < -r$, 故由定理 4.3.B (I) 可知

$$A^{1-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{\alpha_2-1},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2+r}{\alpha_2-1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}.$$

则 $Y \leq X$, $0 \leq -\tilde{\alpha} < \tilde{r} \leq \frac{1}{2}$. 再由定理 4.3.B (II) 可得

$$X^{-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} \right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq X^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_2-1}}. \quad (4.3.7)$$

因为 (4.3.7) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}},$$

从而由比较引理得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}.$$

(3) 假设条件 (iii) 成立. 由 $0 \leq -r < \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ 及定理 4.3.B (II) 可知

$$A^{-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{\alpha_2},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}.$$

则 $Y \leq X$ 且 $0 \leq -\tilde{\alpha} < \tilde{r} \leq \frac{1}{2}$. 又由定理 4.3.B (II) 可知

$$X^{-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2\alpha_2}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2\alpha_2}} \right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq X^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_2}}. \quad (4.3.8)$$

因为 (4.3.8) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}.$$

由比较引理, 得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}.$$

定理 4.3.4 的证明 (1) 由 $0 < -r < \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, $A \geq B > 0$ 及定理 4.3.B (II) 可得

$$A^{-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{\alpha_2},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}.$$

则 $Y \leq X$ 且 $\frac{1}{2} \leq \tilde{r} < -\tilde{\alpha} \leq 1$. 由定理 4.3.B (I) 可得

$$X^{1-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{1-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}}. \quad (4.3.9)$$

因为 (4.3.9) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1 - \alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{r}{\alpha_1 + r}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{r}{\alpha_2 + r}},$$

由比较引理, (1) 得证.

(2) 因为 $0 \leq -r < \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, 且 $A \geq B > 0$, 由定理 4.3.B (II) 可得

$$A^{-\alpha_2} \geq \left(A^{-\frac{\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{-\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-\alpha_2}{-\alpha_2 - r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2 + r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + r}}, \quad Y = A^{\alpha_2},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}.$$

则 $Y \leq X$, $\frac{1}{2} \leq \tilde{r} \leq 1$, $-\tilde{r} < \tilde{\alpha} \leq 0$. 由引理 4.3.1 可得

$$\left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}} \right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha} + \tilde{r}}} \geq X^{1-\tilde{r}}. \quad (4.3.10)$$

因为 (4.3.10) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1 - \alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{-r}{\alpha_1 + r}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{-r}{\alpha_2 + r}},$$

由比较引理可知, 定理 4.3.4 得证.

定理 4.3.5 的证明 (1) 由 $\frac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1$, $-\alpha_2 < r \leq 0$ 及引理 4.3.1 可得

$$\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2 + r}} \geq A^{1-\alpha_2}. \quad (4.3.11)$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}} \right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2 + r}}, \quad Y = A^{1-\alpha_2},$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_2}, \quad \tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{1 - \alpha_2}.$$

可得 $X \geq Y$, $\frac{1}{2} \leq \tilde{r} \leq 1$, $-\tilde{r} < \tilde{\alpha} \leq 0$. 再由引理 4.3.1 和 (4.3.11) 可得

$$\left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}} \geq X^{1-\tilde{r}},$$

也就是说,

$$\begin{aligned} & \left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \\ & > \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}. \end{aligned}$$

由比较引理可得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

(2) 由 $\frac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1$, $-\alpha_2 < r \leq 0$ 及引理 4.3.1 可得

$$\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}} \geq A^{1-\alpha_2}. \quad (4.3.12)$$

令

$$\begin{aligned} X &= \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{1-\alpha_2}, \\ \tilde{\alpha} &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_2}, \quad \tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{1 - \alpha_2}. \end{aligned}$$

可得 $X \geq Y$, $\frac{1}{2} \leq -\tilde{\alpha} \leq 1$, $0 \leq \tilde{r} < -\tilde{\alpha} \leq 1$. 再由定理 4.3.B (I) 和 (4.3.12) 可得

$$X^{1-\tilde{r}} \geq \left(X^{-\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{-\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\begin{aligned} & \left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2\alpha_2-1+r}{\alpha_1+r}} \\ & \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{2\alpha_2-1+r}{\alpha_2+r}}. \end{aligned}$$

由比较引理, 得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

推论 4.3.1 的证明 (1) 因为 $-r \leq -2r$, 由定理 4.3.4 (2), 得 (1).

(2) 因为 $-1-2r \leq -r$, 由定理 4.3.2 得 (2).

4.4 Furuta 不等式应用于算子方程

设 H 是 Hilbert 空间, T 是 H 到 H 内的有界线性算子. 若 T 是 1-1 的且 T 的值域 $R(T)$ 在 H 中稠密, 则称 T 为 **非奇异算子**.

假设 N 和 K 是 H 上的正算子, 且 N 是非奇异算子, G. K. Pedersen 和 M. Takesaki 首先研究了算子方程 $TNT = K$, 并作为非可换 Radon Nikodym 定理的一个有用工具. 这里, 借助于他们的结果的一个推广, 我们证明如下定理:

定理 4.4.1 设 N, K 是 H 上的正算子, 且 N 是非奇异算子. 如果存在一个正算子 T 使得对某自然数 n ,

$$T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n = K,$$

则对任意自然数 $m \leq n$, 存在正算子 T_1 使

$$T_1\left(N^{\frac{1}{m}}T_1\right)^m = K,$$

并且对各种情况而言, 解 T 及 T_1 都至多是唯一的.

为证明本定理, 需要下面一个引理.

引理 4.4.1^[46] 设 N 和 K 是正算子, 且 N 是非奇异算子, 则对一个自然数 n , 下面两个条件等价:

$$(1) \text{ 对某个 } a > 0, \text{ 有 } aN^{\frac{1}{n}} \geq \left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}};$$

$$(2) \text{ 存在一个正算子 } T \text{ 使 } T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n = K,$$

其中 (2) 中的解 T 是唯一的且满足 $\|T\| \leq a$.

注 如果 N 是一个可逆算子 (或更一般地, 对某个 $a > 0$, 有 $a^{n+1}N \geq K$), 则条件 (1) 成立, 且当 N 可逆时, (2) 中的解 T 可由下式给出:

$$T = N^{-\frac{1}{2n}}\left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}N^{-\frac{1}{2n}}.$$

为证明引理 4.4.1, 需要下述定理 4.4.A.

定理 4.4.A 设 A 和 B 是 H 上的有界线性算子, 则对某个 $\lambda \geq 0$, $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$ 当且仅当存在算子 C 使 $A = BC$ 且 $\|C\| \leq \lambda$.

证 (\Leftarrow) 如果 $A = BC$, 则

$$\begin{aligned} AA^* &= BCC^*B^* = \|C\|^2 BB^* - B(\|C\|^2 - CC^*)B^* \\ &\leq \|C\|^2 BB^*. \end{aligned}$$

(\Rightarrow) 设对某个 $\lambda \geq 0$, $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$. 定义算子 $D: R(B^*) \rightarrow R(A^*)$, 使得 $B^*x \mapsto A^*x$. 若 $x \in \overline{R(B^*)}$, 取 $y_n = B^*g_n$ 使 $y_n \rightarrow x$. 定义 $Dx = \lim_{n \rightarrow \infty} Dy_n$, 因为

$$\|Dy_n - Dy_m\|^2 \leq \lambda^2 \|y_n - y_m\|^2,$$

若存在 $z_n \rightarrow x$, 则有

$$\|Dy_n - Dz_n\|^2 \leq \lambda^2 \|y_n - z_n\|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故 D 是有定义的. 由于

$$\begin{aligned} \|D(B^*f)\|^2 &= \|A^*f\|^2 = (AA^*f, f) \leq \lambda^2 (BB^*f, f) \\ &= \lambda^2 \|B^*f\|^2, \end{aligned}$$

因此 D 可被唯一有界地延拓到 $R(B^*)$ 的闭包上. 规定 $D|_{\overline{R(B^*)}^\perp} = 0$, 则 $DB^* = A^*$.

引理 4.4.1 的证明 (1) \Rightarrow (2) 由定理 4.4.A 知, (1) 必蕴含一个算子 S 使

$$\left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}} = N^{\frac{1}{2n}}S = S^*N^{\frac{1}{2n}}.$$

令 $T = SS^*$, 显见 $\|T\| \leq a$ (可由定理 4.4.A, 因 $N^{\frac{1}{2n}}SS^*N^{\frac{1}{2n}} \leq aN^{\frac{1}{n}}$) 且

$$N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}} = \left(N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1} = N^{\frac{1}{2n}}T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^nN^{\frac{1}{2n}}.$$

由于 N 非奇异, 故 $K = T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n$.

(2) \Rightarrow (1) 由 (2) 知

$$\left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left[\left(N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}} = N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}} \leq aN^{\frac{1}{n}}.$$

假若 $T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n = K = Z\left(N^{\frac{1}{n}}Z\right)^n$, 则易知

$$\left(N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1} = \left(N^{\frac{1}{2n}}ZN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1}.$$

由 N 非奇异知 $T = Z$.

引理 4.4.2 设 A, B 是正算子, α, β 是满足 $\alpha \geq \beta > 0$ 的实数, 且 a 是正实数, 则条件

$$(i) \quad aA^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(A^{\frac{1}{2\alpha}}BA^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

蕴含条件

$$(ii) \quad a^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}A^{\frac{1}{\beta}} \geq \left(A^{\frac{1}{2\beta}}BA^{\frac{1}{2\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

证 假若 (i) 成立, 令 $p = \alpha + 1$, $q = \beta + 1$ 及 $r = \frac{\alpha - \beta}{2\beta}$, 则有

$$(1 + 2r)q = p + 2r = \alpha + \frac{\alpha}{\beta},$$

且 $r \geq 0$, $q \geq 1$, $p \geq 0$. 故由 Furuta 不等式知

$$\left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{p+2r}{q}} \geq \left[\left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^r \left(A^{\frac{1}{2\alpha}}BA^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{\frac{p}{\alpha+1}} \left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^r\right]^{\frac{1}{q}},$$

即

$$\left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \geq a^{\frac{2r}{\beta+1}} \left(A^{\frac{1}{2\beta}}BA^{\frac{1}{2\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

由 $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{2r}{\beta+1} = \frac{\alpha+1}{\beta+1}$, 得

$$a^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}A^{\frac{1}{\beta}} \geq \left(A^{\frac{1}{2\beta}}BA^{\frac{1}{2\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

定理 4.4.1 的证明 设 N 和 K 是正算子, 且 N 是非奇异的. 假若存在正算子 T 使对某个自然数 n , 有 $T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n = K$, 由引理 4.4.1, 对某个 $a > 0$, 有

$$aN^{\frac{1}{n}} \geq \left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

再由引理 4.4.2, 对任意自然数 $m \leq n$, 有

$$a^{\frac{n+1}{m+1}} N^{\frac{1}{m}} \geq \left(N^{\frac{1}{2m}} K N^{\frac{1}{2m}} \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

利用引理 4.4.1, 存在正算子 T_1 , 使 $T_1 \left(N^{\frac{1}{m}} T_1 \right)^m = K$.

唯一性由引理 4.4.1 可得.

如果上述条件 $m \leq n$ 改为 $m > n$, 则结果未必成立, 我们有

定理 4.4.2^[11] 设自然数 m, n 满足 $m < n$, 则必可找到一个非奇异正算子 N 及一个正算子 K 使

$$(1) \text{ 存在算子 } T \text{ 使 } T \left(N^{\frac{1}{m}} T \right)^m = K;$$

$$(2) \text{ 不存在算子 } S \text{ 使 } S \left(N^{\frac{1}{n}} S \right)^n = K.$$

首先我们有下述引理:

引理 4.4.3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$, 其中 a 为实数, 则对任意自然数 j , $A^{j+1} = (1 + a^2)^j A$ 及 $\|A\| = 1 + a^2$.

定理 4.4.2 的证明 首先考虑 2 维 Hilbert 空间 X 上的下列算子 A_k, B_k :

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{-4} \end{pmatrix}, \quad B_k = \frac{1}{k^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & k^{-1} \\ k^{-1} & k^{-2} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

假设 $N = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} A_k^m$ 及 $K = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} K_k$ 定义于空间

$$Y = X \oplus X \oplus \dots = \left\{ (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty \right\}$$

上, 其中 $K_k = A_k^{-\frac{1}{2}} B_k^{m+1} A_k^{-\frac{1}{2}}$. $(y, z) = \sum_{i=1}^{+\infty} (y_i, z_i)$, $Ny = (A_k^m y_k)_{k=1}^{+\infty}$.

由引理 4.4.3 知

$$K_k = A_k^{-\frac{1}{2}} B_k^{m+1} A_k^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{k^2 + 1} k^{-2m} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{pmatrix}.$$

故 $\|K_k\| = \frac{1}{k^{2m}}$, 当 $k \geq 1$ 时, K 可被定义. 事实上, 易见

$$\|Kx\|^2 \leq \|x\|^2,$$

由 N 定义知, N 是非奇异的正算子且 K 是 Y 上的正算子.

$$N^{\frac{1}{m}} - \left(N^{\frac{1}{2m}} K N^{\frac{1}{2m}}\right)^{\frac{1}{m+1}} = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} (A_k - B_k) \geq 0.$$

由引理 4.4.1 知存在算子 T 使 $T\left(N^{\frac{1}{m}} T\right)^m = K$.

现假设存在算子 S 使 $S\left(N^{\frac{1}{n}} S\right)^n = K$, 则由引理 4.4.1 应有

$$bN^{\frac{1}{n}} \geq \left(N^{\frac{1}{2n}} K N^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad \text{对某个 } b > 0,$$

即

$$b \geq A_k^{-\frac{m}{2n}} \left(A_k^{\frac{1}{2}(\frac{m}{n}-1)} B_k^{m+1} A_k^{\frac{1}{2}(\frac{m}{n}-1)}\right)^{\frac{1}{n+1}} A_k^{-\frac{m}{2n}}.$$

通过利用引理 4.4.3 计算, 得

$$\begin{aligned} b &\geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{2(1-\frac{m}{n})} \end{pmatrix} \frac{1}{k^{2(m+1)}(k^2+1)} \right. \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} k^2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{2(1-\frac{m}{n})} \end{pmatrix} \left. \right]^{\frac{1}{n+1}} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} b &\geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix} \left[\frac{k^2}{k^{2(m+1)}(k^2+1)} \begin{pmatrix} 1 & k^{1-\frac{2m}{n}} \\ k^{1-\frac{2m}{n}} & k^{2-\frac{4m}{n}} \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{n+1}} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

回忆引理 4.4.3, 有 $A^{\frac{1}{n+1}} = \frac{A}{(1+a^2)^{\frac{n}{n+1}}}$, 知上式等价于

$$b \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{k^{2m}(k^2+1)} \right]^{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{\left(1+k^{2-\frac{4m}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}} \\ \cdot \begin{pmatrix} 1 & k^{1-\frac{2m}{n}} \\ k^{1-\frac{2m}{n}} & k^{2-\frac{4m}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix}.$$

故

$$b \geq \frac{1}{\left[k^{2m}(k^2+1)\right]^{\frac{1}{n+1}} \left(1+k^{2-\frac{4m}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}} \left\| \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{pmatrix} \right\|.$$

从而

$$b \geq \frac{k^2+1}{\left[k^{2m}(k^2+1)\right]^{\frac{1}{n+1}} \left(1+k^{2(1-\frac{2m}{n})}\right)^{\frac{n}{n+1}}}.$$

由定理 4.4.1 知, 只需证明 $n = m+1$ 时的情况. 如果 $n = m+1$, 则

$$b \geq \frac{k^2+1}{\left[k^{2m}(k^2+1)\right]^{\frac{1}{m+2}} \left(1+k^{2\frac{1-m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}}.$$

因为 $\max \left\{ \frac{2}{m+1}, \frac{2m}{m+1} \right\} < 2$, 所以

$$b \geq \left(\frac{1+k^2}{k^{\frac{2m}{m+1}} + k^{\frac{2}{m+1}}} \right)^{\frac{m+1}{m+2}} \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow +\infty),$$

矛盾.

4.5 与广义 Furuta 不等式相应的算子单调函数

作为 Furuta 不等式的一个推广, 我们有如下结果:

定理 4.5.1^{[43],[50]} 设 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则对每个 $t \in [0, 1]$ 及 $p \geq 1$ 有

$$F_{p,t}(A, B, r, s) = A^{\frac{-r}{2}} \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} A^{\frac{-r}{2}} \quad (4.5.1)$$

是 $s \geq 1$ 及 $r \geq t$ 上关于 r 和 s 的递减函数, 且有

$$A^{1-t} = F_{p,t}(A, A, r, s) \geq F_{p,t}(A, B, r, s)$$

对一切 $s \geq 1$, $p \geq 1$ 且 $r \geq t \geq 0$ 成立.

证 不妨设 $B > 0$. 首先证明 $F_{p,t}(A, B, r, s)$ 是 s 的降函数.

第一步, 当 $1 \leq s \leq 2$ 时, 对一切 $t \in [0, 1]$ 有 $A^{-t} \leq B^{-t}$. 由降幂定理及 L-H 不等式得

$$\begin{aligned} A^{\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} &= A^{\frac{r-t}{2}} B^{\frac{p}{2}} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}} \right)^{s-1} B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{r-t}{2}} \\ &\leq A^{\frac{r-t}{2}} B^{(p-t)s+t} A^{\frac{r-t}{2}}. \end{aligned}$$

由于 $\frac{1-t+r}{(p-t)s+r} \in [0, 1]$, 利用 L-H 不等式及 Furuta 不等式, 得

$$\begin{aligned} \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} &\leq \left(A^{\frac{r-t}{2}} B^{(p-t)s+t} A^{\frac{r-t}{2}} \right)^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \\ &\leq A^{1-t+r}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

第二步, 当 $1 \leq s \leq 2$ 时, 令

$$A_1 = A^{1-t+r}, \quad B_1 = \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}},$$

则 $A_1 \geq B_1 \geq 0$, 故当 $t_1 \in [0, 1]$ 时, 由第一步又知

$$\begin{aligned} &\left[A_1^{\frac{r_1}{2}} \left(A_1^{\frac{-t_1}{2}} B_1^{p_1} A_1^{\frac{-t_1}{2}} \right)^{s_1} A_1^{\frac{r_1}{2}} \right]^{\frac{1-t_1+r_1}{(p_1-t_1)s_1+r_1}} \\ &\leq \left(A_1^{\frac{r_1-t_1}{2}} B_1^{(p_1-t_1)s_1+t_1} A_1^{\frac{r_1-t_1}{2}} \right)^{\frac{1-t_1+r_1}{(p_1-t_1)s_1+r_1}} \\ &\leq A_1^{1-t_1+r_1} \end{aligned}$$

对一切 $s_1 \in [1, 2]$, $p_1 \geq 1$ 及 $r_1 \geq t_1 \geq 0$ 成立.

若令

$$p_1 = \frac{(p-t)s+r}{1-t+r} \geq 1, \quad r_1 = t_1 = \frac{r}{1-t+r} \in [0, 1],$$

则

$$\frac{1-t_1+r_1}{(p_1-t_1)s_1+r_1} = \frac{1-t+r}{(p-t)ss_1+r},$$

$$A_1^{\frac{r_1}{2}} = A_1^{\frac{t_1}{2}} = A^{\frac{r}{2}}, \quad B_1^{p_1} = A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}}.$$

故

$$A_1 \geq B_1 \geq \left\{ A^{\frac{r}{2}} \left[A^{-\frac{r}{2}} A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} A^{-\frac{r}{2}} \right]^{s_1} A^{\frac{r}{2}} \right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)ss_1+r}},$$

即

$$\begin{aligned} A^{1-t+r} &\geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \\ &\geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{ss_1} A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)ss_1+r}}. \end{aligned} \quad (*)$$

在上式中, 由 $1 \leq s \leq 1$, $1 \leq s_1 \leq 2$ 知 $1 \leq ss_1 \leq 4$, 故由 (*) 式可知 (4.5.2) 两端对一切 $1 \leq s \leq 4$ 成立. 类似可得 (4.5.2) 两端对一切 $s \geq 1$ 成立, 且由 (*) 式可知 $F_{p,t}(A, B, r, s)$ 关于一切 $s \geq 1$ 单调下降.

下面证明 $F_{p,t}(A, B, r, s)$ 关于 r 递减. 由 (*) 式有

$$A^{1-t} \geq A^{\frac{-r}{2}} \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} A^{\frac{-r}{2}} \quad (4.5.3)$$

对一切 $s \geq 1$, $p \geq 1$ 及 $r \geq t$ 成立. 由 (4.5.3) 及降幂引理, 得

$$\begin{aligned} &\left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{1-t} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} \\ &\geq \left[\left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{\frac{s}{2}} A^r \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{\frac{s}{2}} \right]^{\frac{1-t-(p-t)s}{(p-t)s+r}}. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

令

$$\begin{aligned} A_2 &= \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{1-t} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}}, \\ B_2 &= \left[\left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} \right]^{\frac{-(1-t)+(p-t)s}{(p-t)s+r}}, \end{aligned}$$

则 $A_2 \geq B_2$ 且 $A_2 > 0$, $B_2 > 0$. 重复第一步中证明, 对 $t_2 \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned}
A_2^{1-t_2+r_2} &\geq \left(A_2^{\frac{r_2-t_2}{2}} B_2^{(p_2-t_2)s_2+t_2} A_2^{\frac{r_2-t_2}{2}} \right)^{\frac{1-t_2+r_2}{(p_2-t_2)s_2+r_2}} \\
&\geq \left[A_2^{\frac{r_2}{2}} \left(A_2^{-\frac{t_2}{2}} B_2^{p_2} A_2^{-\frac{t_2}{2}} \right)^{s_2} A_2^{\frac{r_2}{2}} \right]^{\frac{1-t_2+r_2}{(p_2-t_2)s_2+r_2}} \quad (4.5.5)
\end{aligned}$$

对一切 $1 \leq s_2 \leq 2$, $p_2 \geq 1$ 及 $r_2 \geq t_2$ 成立. 令

$$r_2 = t_2 = 1, \quad p_2 = \frac{(p-t)s+r}{(p-t)s-(1-t)} \geq 1,$$

则

$$B_2^{p_2} = \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r} \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}},$$

且

$$\frac{1-t_2+r_2}{(p_2-t_2)s_2+r_2} = \frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r+(1-t+r)(s_2-1)}. \quad (4.5.6)$$

令 $D = \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}}$, 则

$$\begin{aligned}
&A_2^{\frac{r_2}{2}} \left(A_2^{-\frac{t_2}{2}} B_2^{p_2} A_2^{-\frac{t_2}{2}} \right)^{s_2} A_2^{\frac{r_2}{2}} \\
&= A_2^{\frac{1}{2}} \left[A_2^{-\frac{1}{2}} \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r} \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A_2^{-\frac{1}{2}} \right]^{s_2} A_2^{\frac{1}{2}} \\
&= D A^{-\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{r}{2}} D A_2^{-1} D A^{-\frac{r}{2}} \right)^{s_2-1} A^{-\frac{r}{2}} D \\
&= D A^{-\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{r}{2}} A^{t-1} A^{-\frac{r}{2}} \right)^{s_2-1} A^{-\frac{r}{2}} D \\
&= \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r-(1-t+r)(s_2-1)} \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}}. \quad (4.5.7)
\end{aligned}$$

故由 (4.5.5), (4.5.6), (4.5.7) 知

$$\begin{aligned}
&\left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{1-t} \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} \\
&= A_2 \geq B_2 \\
&= \left[\left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r} \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} \right]^{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r}} \\
&\geq \left[\left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} A^{-(r+\varepsilon)} \left(A_2^{-\frac{t}{2}} B^p A_2^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{s}{2}} \right]^{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r+\varepsilon}}, \quad (4.5.8)
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = (1-t+r)(s_2-1)$. 由于 $1 \leq s_2 \leq 2$, $t \in [0, 1]$, $r \geq t$, 知 $\varepsilon \geq 0$. 令 $r_2 = r + \varepsilon$, 对 (4.5.8) 应用两次降幂引理, 得

$$\begin{aligned} A^{1-t} &\geq A^{-\frac{r}{2}} \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{-\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} A^{-\frac{r}{2}} \\ &\geq A^{-\frac{r_2}{2}} \left[A^{\frac{r_2}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{\frac{r_2}{2}} \right]^{\frac{1-t+r_2}{(p-t)s+r_2}} A^{-\frac{r_2}{2}} \end{aligned}$$

对任意的 r_2, r 使 $r_2 \geq r \geq t$ 及 $s \geq 1$, $p \geq 1$, $t \in [0, 1]$ 成立. 从而 $F_{p,t}(A, B, r, s)$ 是 $r \geq 0$ 的降函数.

注 该定理可用定理 G 的结果进行简单的证明.

推论 4.5.1 设 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则对每个 $t \in [0, 1]$,

$$A^{((p-t)s+r)\alpha} \geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^\alpha$$

对一切 $s \geq 0$, $p \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ 且 $r \geq t$ 使 $(s-1)(p-1) \geq 0$ 及 $1-t+r \geq [(p-t)s+r]\alpha$ 成立.

证 当 $0 \leq s \leq 1$ 且 $0 \leq p \leq 1$ 时, 结果由 L-H 不等式易得; 当 $s \geq 1$, $p \geq 1$ 时, 由定理 4.5.1 及 L-H 不等式易得.

推论 4.5.2 若 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则

$$A^r \geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{r}{(p-1)s+r}}$$

对一切 $s \geq 1$, $p \geq 1$ 及 $r \geq 1$ 成立.

由定理 4.5.1 中令 $t=1$ 即可.

当 $s=r$ 时, 上面的推论变为下面的 Ando 及 Hiai 的一个结论.

定理 4.5.2 设 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则

$$A^r \geq \left[A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}} \right)^r A^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

对一切 $p \geq 1$ 及 $r \geq 1$ 成立.

推论 4.5.3 设 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则对每个 $t \in [0, 1]$, 当 $2p \geq 1+t$ 时有

$$(1) A^{1+t} \geq \left(A^{\frac{t}{2}} B^{2p-t} A^{\frac{t}{2}} \right)^{\frac{1+t}{2p}} \geq \left| A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{\frac{t}{2}} \right|^{\frac{1+t}{p}};$$

$$(2) A^2 \geq \left(A^{\frac{1}{2}} B^{2p-t} A^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{2p+1-t}} \geq \left| A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{\frac{t}{2}} \right|^{\frac{4}{2p+1-t}}.$$

证 类似定理 4.5.1 中第一部分证明, 令 $s = 2$ 及 $r = 2t$, 由

$$\frac{1-t+r}{(p-t)s+r} = \frac{1+t}{2p} \leq 1$$

及 (4.5.2) 可得

$$\begin{aligned} A^{1+t} &\geq \left(A^{\frac{t}{2}} B^{2p-t} A^{\frac{t}{2}} \right)^{\frac{1+t}{2p}} \\ &\geq \left[A^t \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^2 A^t \right]^{\frac{1+t}{2p}} \\ &= \left| A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{\frac{t}{2}} \right|^{\frac{1+t}{p}}. \end{aligned}$$

同理, 令 $s = 2$, $r = 1+t$ 可得 (2).

推论 4.5.4 设 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则

$$A^2 \geq \left(A^{\frac{1}{2}} B^{2p-1} A^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left| A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{\frac{1}{2}} \right|^{\frac{2}{p}} \quad (p \geq 1).$$

推论 4.5.5 设 $A \geq B \geq 0$, 则

$$G(p, r) = A^{-\frac{r}{2}} \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1+r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}}$$

是 p 及 r 的降函数, 其中 $p \geq 1$ 及 $r \geq 0$.

只需在定理 4.5.1 中令 $t = 0$, $p = 1$ 且用 p 代替 s 即可证明.

4.6 Furuta 不等式在 Kantorovich 型不等式中的应用

本节中我们先给出混序的算子方程的特征, 进而研究混序时的 Kantorovich 型不等式. 首先给出下列引理:

引理 4.6.1 设 T 是非奇异正算子. 如果 $XTX = YTY$ 对某 $X \geq 0$ 及 $Y \geq 0$ 成立, 则 $X = Y$.

证 由 $XTX = YTY$, 易知 $(T^{\frac{1}{2}}XT^{\frac{1}{2}})^2 = (T^{\frac{1}{2}}YT^{\frac{1}{2}})^2$, 从而

$$T^{\frac{1}{2}}XT^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}YT^{\frac{1}{2}}.$$

再由 T 是非奇异正算子得结论成立.

引理 4.6.2 设 $0 < m \leq A \leq M$, 且 B 是正压缩算子, 则

$$\frac{(m+M)^2}{4mM}A \geq BAB.$$

证 由 Kantorovich 不等式, 知

$$(ABx, Bx)(A^{-1}Bx, Bx) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \|Bx\|^4.$$

再由施瓦茨不等式, 得

$$\begin{aligned} (ABx, Bx)(A^{-1}Bx, Bx) &\leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (B^2x, x)^2 \\ &\leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (Bx, x)^2 \\ &= \frac{(m+M)^2}{4mM} (A^{-\frac{1}{2}}Bx, A^{\frac{1}{2}}x)^2 \\ &\leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (A^{-1}Bx, Bx)(Ax, x). \end{aligned}$$

注 引理 4.6.2 中的结果不能换为 $A \geq BAB$. 事实上, 只要令

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

即可证明.

定理 4.6.1^[58] 设 $A, B > 0$, 则下列条件等价:

(1) $A \gg B$;

(2) 对每个 $\alpha \in [0, 1]$, $p \geq 0$ 及 $u \geq 0$, 存在唯一的正可逆压缩 T 满足

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s = T A^{(p+\alpha u)s} T,$$

其中 $s \geq 1$, $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$;

(3) 对每个 $\alpha \in [0, 1]$ 及 $p \geq u \geq 0$, 存在唯一的正可逆压缩 T 满足

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s = T A^{(p+\alpha u)s} T,$$

其中 $s \geq 1$;

(4) 对每个 $p \geq 0$, 存在唯一的正可逆压缩 T 满足

$$B^p = T A^p T.$$

证 (1) \Rightarrow (2) 由于 $A \gg B$ 等价于对一切 $p, u \geq 0$ 有

$$A^u \geq \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p+u}}. \quad (4.6.1)$$

令 $A_1 = A^u$, $B_1 = \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p+u}}$, 则由广义的 Furuta 不等式知对每个 $t \in [0, 1]$,

$$A_1^{\frac{(p_1-t)s+r}{q}} \geq \left[A_1^{\frac{r}{2}} \left(A_1^{-\frac{t}{2}} B_1^{p_1} A_1^{-\frac{t}{2}}\right)^s A_1^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.6.2)$$

在条件 $s \geq 1$, $p_1 \geq 1$, $q \geq 1$, $r \geq t$ 及 $(1-t+r)q \geq (p_1-t)s+r$ 下成立. 设 $u > 0$, 令

$$p_1 = \frac{p+u}{u} \geq 1, \quad q = 2, \quad r = (p_1-t)s,$$

则 $(1-t+r)q \geq (p_1-t)s+r$ 显然成立, 而 $r \geq t$ 等价于 $[p+u(1-t)]s \geq ut$, 再把 $1-t$ 换为 α , 则在 (2) 的条件下有

$$I \geq A^{-\frac{(p+\alpha u)s}{2}} \left[A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} \left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}} \right)^s A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{(p+\alpha u)s}{2}}. \quad (4.6.3)$$

令上式右端为 T , 则 T 是正压缩算子, 且有

$$A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} T A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} = \left[A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} \left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}} \right)^s A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

两边平方, 可得

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s = T A^{(p+\alpha u)s} T.$$

容易验证上式当 $u=0$ 时也成立, 唯一性由引理 4.6.1 可得.

(2) \Rightarrow (3) 显然成立.

(3) \Rightarrow (4) 令 $u=0$, $s=1$ 即可.

(4) \Rightarrow (1) 由 (4) 知

$$\left(A^{\frac{p}{2}} T A^{\frac{p}{2}}\right)^2 = A^{\frac{p}{2}} T A^p T A^{\frac{p}{2}} = A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}}.$$

由 L-H 不等式及定理 4.2.A 可知结论成立.

应用定理 4.6.1 及引理 4.6.2 易得下面定理:

定理 4.6.2^[58] 设 $B > 0$, $0 < m \leq A \leq M$, 则下列条件等价:

(1) $A \gg B$;

(2) 对每个 $\alpha \in [0, 1]$, $p \geq 0$ 及 $u \geq 0$,

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s \leq \frac{(M^{(p+\alpha u)s} + m^{(p+\alpha u)s})^2}{4M^{(p+\alpha u)s} m^{(p+\alpha u)s}} A^{(p+\alpha u)s},$$

其中 $s \geq 1$, $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$;

(3) 对每个 $\alpha \in [0, 1]$ 及 $p \geq u \geq 0$,

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s < \frac{(M^{(p+\alpha u)s} + m^{(p+\alpha u)s})^2}{4M^{(p+\alpha u)s} m^{(p+\alpha u)s}} A^{(p+\alpha u)s},$$

其中 $s \geq 1$;

(4) 对每个 $p \geq 0$,

$$\frac{(M^p + m^p)^2}{4M^p m^p} A^p \geq B^p.$$

下面考虑混序下的 Kantorovich 型不等式.

引理 4.6.3 假设

$$K_+(m, M, p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - Mm^p)^{p-1}},$$

$$K_1(h, p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(h^p - 1)^p}{(h-1)(h^p - h)^{p-1}},$$

以及 $h = \frac{M}{m}$, $h_n = \frac{1 + \frac{1}{n} \log M}{1 + \frac{1}{n} \log m}$, 其中 n 为自然数. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{h_n^{np} - 1}{h_n^{np} - h_n} \right)^n = h^{\frac{1}{h^p - 1}} \quad (4.6.4)$$

及

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} K_+ \left(1 + \frac{1}{n} \log m, 1 + \frac{1}{n} \log M, np \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} K_1(h_n, np) = M_h(p), \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

其中 $M_h(p) = \frac{1}{p \log h} (h^p - 1) h^{\frac{p}{h^p - 1}}$.

证 令

$$f(n) = \left(\frac{h_n^{np} - 1}{h_n^{np} - h_n} \right)^n.$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $h_n \rightarrow 1$, $h_n^n \rightarrow h$. $\log f(n)$ 是 $0 \cdot \infty$ 型, 应用洛必达法则, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dn} \left(\log \frac{h_n^{np} - 1}{h_n^{np} - h_n} \right)}{\frac{d}{dn} \left(\frac{1}{n} \right)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 [(h_n^{np})'(1 - h_n) + (h_n)'(h_n^{np} - 1)]}{-(h_n^{np} - 1)(h_n^{np} - h_n)} \\ = -\frac{1}{(h^p - 1)^2} \\ \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{np} \left[p \log h_n^n + \frac{n^2 p \log h^{-1}}{(n + \log M)(n + \log m)} \right] \frac{n \log h^{-1}}{n + \log m} \\ - \frac{1}{(h^p - 1)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \log h^{-1} (h_n^{np} - 1)}{(n + \log m)^2} \\ = -\frac{1}{(h^p - 1)^2} h^p (p \log h - p \log h) \log h^{-1} - \frac{(h^p - 1)}{(h^p - 1)^2} \log h^{-1} \\ = \log h^{\frac{1}{h^p - 1}}. \end{aligned}$$

利用对任意的 $X > 0$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{n} \log X \right)^n = X$, 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} K_+ \left(1 + \frac{1}{n} \log m, 1 + \frac{1}{n} \log M, np \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_1(h_n, np) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{-1}{np} \right)^{np}}{(np-1)(h_n-1)} \left[(h_n^{np} - h_n) \left(\frac{h_n^{np} - 1}{h_n^{np} - h_n} \right)^{np} \right] \\ &= \frac{1}{p \log h} (h^p - 1) h^{\frac{p}{h^p-1}} \\ &= M_h(p). \end{aligned}$$

定理 4.6.3 (Kantorovich 型不等式) 设 $A > 0$, $0 < m \leq B \leq M$, 则下列条件成立:

(1) $A \geq B$ 蕴含 $K_+(m, M, p)A^p \geq B^p$, 其中 $p \geq 1$, $K_+(m, M, p)$ 如引理 4.6.3 中所示;

(2) $A \gg B$ 蕴含 $M_h(p)A^p \geq B^p$, 其中 $p > 0$, $M_h(p)$ 如引理 4.6.3 中所示;

(3) $A \geq B$ 蕴含 $\frac{(M^{p-1} + m^{p-1})^2}{4m^{p-1}M^{p-1}}A^p \geq B^p$, 其中 $p \geq 2$;

(4) $A \gg B$ 蕴含 $\frac{(M^p + m^p)^2}{4m^pM^p}A^p \geq B^p$, 其中 $p \geq 0$.

证 (1) 由定理 2.5.5 可得.

(2) 对充分大的自然数 n , 有

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{n} \log A &\geq I + \frac{1}{n} \log B > 0, \\ I + \frac{1}{n} \log M &\geq I + \frac{1}{n} \log B \geq I + \frac{1}{n} \log m. \end{aligned}$$

应用 (1) 得, 当 $np \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & K_+ \left(1 + \frac{1}{n} \log m, 1 + \frac{1}{n} \log M, np \right) \left(I + \frac{1}{n} \log A \right)^{np} \\ &\geq \left(I + \frac{1}{n} \log B \right)^{np}. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由引理 4.6.3 可得.

(3) 设 $p \geq 2$, 由 Furuta 不等式有

$$A_1 = \left(B^{\frac{p-2}{2}} A^p B^{\frac{p-2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \geq B^{p-1} = B_1.$$

由定理 2.5.5 知

$$K_+(m^{p-1}, M^{p-1}, 2)A_1^2 \geq B_1^2.$$

化简后可得 (3).

(4) 由 (3) 并仿照 (2) 的证明证明之.

4.7 Kantorovich 型不等式应用于算子 混序的一个特征

由对数函数的算子单调性, 可知 $A \geq B > 0$ 蕴含混序 $A \gg B$. 关于混序一些特征和性质可参见 [8],[27],[93],[45]. 特别地, 有下列结果:

定理 4.7.A [8],[27] 对正可逆算子 A 及 B 有下列条件等价:

(1) $\log A \geq \log B$;

(2) 对一切 $p \geq 0$, $\left(B^{\frac{p}{2}} A^p B^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \geq B^p$;

(3) 对一切 $p \geq 0$ 及 $r \geq 0$, $\left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$.

定理 4.7.B (Kantorovich 型不等式) [45] 设 $A > 0$ 及有正数 M, m , 使得 $M \geq B \geq m > 0$. 则下列条件成立且 (2) 可由 (1) 得出:

(1) 对一切 $p \geq 2$, $A \geq B$ 蕴含 $\frac{(M^{p-1} + m^{p-1})^2}{4m^{p-1}M^{p-1}} A^p \geq B^p$;

(2) 对一切 $p \geq 0$, $\log A \geq \log B$ 蕴含 $\frac{(M^p + m^p)^2}{4m^p M^p} A^p \geq B^p$.

定理 4.7.C [93] 设 A 及 B 是正可逆算子. 则 $A \geq B > 0$ 当且仅当对一切 $p \geq 2$,

$$\left\| B^{p-1} A^{-\frac{p-2}{2}} B^{-\frac{p}{2}} \right\| A^{p-1} \geq B^{p-1}.$$

作为定理 4.7.C 的一个平行结果, 我们有

定理 4.7.1 ^[110] 设 A 及 B 是正可逆算子, 对任意固定的 $p_0 > 0$, 下列条件等价:

- (1) $A \gg B$;
- (2) 对一切 $p > 0$, $\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\| A^p \geq B^p$;
- (3) 对一切 $p \in (0, p_0)$, $\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\| A^p \geq B^p$.

另一方面我们指出定理 4.7.1 中的条件 $p \in (0, p_0)$ 是本质的, 因为有下列结果:

定理 4.7.2 ^[110] 对任意一个固定的 $p_0 > 0$, 存在两个正可逆算子 A, B 使得对一切 $p \geq p_0$ 有

$$\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\| A^p \geq B^p,$$

但是 $A \gg B$ 不成立.

为了给出它们的证明需要下列结果 ^{[45],[85]}:

定理 4.7.D ^{[45],[85]} 设 $X > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\log X}{n} \right)^n = X.$$

定理 4.7.1 的证明 (1) \Rightarrow (2) 设 $\log A \geq \log B$. 令 $p > 0$, 则对充分大的 n , 有

$$I + \frac{\log A}{n} \geq I + \frac{\log B}{n} > 0,$$

且 $np \geq 2$. 令

$$A_1 = I + \frac{\log A}{n}, \quad B_1 = I + \frac{\log B}{n}.$$

则有 $A_1 \geq B_1 > 0$, 且由定理 4.7.C, 对一切 $np \geq 2$ 有

$$\|B_1^{n(p-\frac{1}{n})} A_1^{n\frac{-(p-\frac{2}{n})}{2}} B_1^{-\frac{np}{2}}\| A_1^{n(p-\frac{1}{n})} \geq B_1^{n(p-\frac{1}{n})}. \quad (4.7.1)$$

再由定理 4.7.D, 可得当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $A_1^n \rightarrow A$ 及 $B_1^n \rightarrow B$. 因此在 (4.7.1)

中令 $n \rightarrow \infty$, 则有 $\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\| A^p \geq B^p$ 对一切 $p > 0$ 成立.

(2) \Rightarrow (3) 显然.

(3) \Rightarrow (1) 令 $0 < p < p_0$ 且 $\lambda_p = \|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\|$. 则由 (3) 得

$B^p \leq \lambda_p A^p$. 由 L-H 不等式, 又有 $B^{\frac{p}{2}} \leq \lambda_p^{\frac{1}{2}} A^{\frac{p}{2}}$, 故

$$B^{\frac{3p}{2}} \leq \lambda_p^{\frac{1}{2}} B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{p}{2}}.$$

现设 $0 < m \leq B \leq M$. 故 $0 < m^{\frac{3p}{2}} \leq B^{\frac{3p}{2}} \leq M^{\frac{3p}{2}}$. 应用定理 4.7.B (1), 就有

$$B^{3p} \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} \lambda_p \left(B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{p}{2}}\right)^2.$$

故

$$B^{2p} \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} \lambda_p A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}}. \quad (4.7.2)$$

由 (4.7.2) 及 $\lambda_p = \|B^{-\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}} B^{2p} A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\|^{\frac{1}{2}}$, 有

$$\lambda_p^2 \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} \lambda_p.$$

故

$$\lambda_p \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}}.$$

因此

$$B^p \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} A^p. \quad (4.7.3)$$

由 (4.7.3), 有

$$\log B \leq \frac{1}{p} \log \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} + \log A.$$

令 $p \rightarrow 0$, 可得 (1).

为了证明定理 4.7.2, 我们有下列简单的不等式:

引理 4.7.1 设 a, b, d 是三个正数, 则

$$(1) \quad b \leq \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right\|;$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \leq (a+b+d)I.$$

定理 4.7.2 的证明 假设 $p_0 > 0$. 令

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} \left[\frac{(2 - 2^{1-\frac{p_0}{2}})^2}{(7 + 3 \cdot 2^{-p_0})^4} \right]^{\frac{1}{p_0}} \right)$. 注意到

$$A = U^* \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U,$$

其中 $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个酉算子, 由简单的计算可知

$$B^{-\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}} B^{2p} A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{11} = \left(1 + 2^{2-\frac{p}{2}}\right)^2 2^p + 2^{-p} \varepsilon^{2p} \left(2 - 2^{1-\frac{p}{2}}\right)^2,$$

$$c_{12} = \left(2 - 2^{1-\frac{p}{2}}\right) \left[\frac{2^{\frac{3p}{2}} \left(1 + 2^{2-\frac{p}{2}}\right)}{\varepsilon^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3p}{2}} \left(4 + 2^{-\frac{p}{2}}\right)}{2^{\frac{p}{2}}} \right],$$

$$c_{21} = \left(2 - 2^{1-\frac{p}{2}}\right) \left[\frac{2^{\frac{3p}{2}} \left(1 + 2^{2-\frac{p}{2}}\right)}{\varepsilon^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3p}{2}} \left(4 + 2^{-\frac{p}{2}}\right)}{2^{\frac{p}{2}}} \right],$$

$$c_{22} = 2^{2p} \varepsilon^{-p} \left(2 - 2^{1-\frac{p}{2}}\right)^2 + \varepsilon^p \left(4 + 2^{-\frac{p}{2}}\right)^2.$$

由引理 4.7.1 (1), 有

$$\begin{aligned}
 & \left\| B^{-\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}} B^{2p} A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}} \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \geq \frac{1}{5} \left\{ \left(2 - 2^{1-\frac{p}{2}} \right) \left[\frac{2^{\frac{3p}{2}} \left(1 + 2^{2-\frac{p}{2}} \right)}{\varepsilon^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3p}{2}} \left(4 + 2^{-\frac{p}{2}} \right)}{2^{\frac{p}{2}}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 & \geq \frac{\varepsilon^{-\frac{p}{4}} 2^{\frac{3p}{4}} \left(2 - 2^{1-\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}}{5} \geq \frac{\varepsilon^{-\frac{p}{4}} 2^{\frac{3p}{4}} \left(2 - 2^{1-\frac{p_0}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}}{5}. \quad (4.7.4)
 \end{aligned}$$

另一方面, 可计算得

$$A^{-\frac{p}{2}} B^p A^{-\frac{p}{2}} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= 2^p \left(1 + 4 \cdot 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2 + 4\varepsilon^p \left(1 - 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2, \\
 d_{12} &= \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \left[2^{p+1} \left(1 + \frac{4}{2^{\frac{p}{2}}} \right) + 2\varepsilon^p \left(4 + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \right], \\
 d_{21} &= \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \left[2^{p+1} \left(1 + \frac{4}{2^{\frac{p}{2}}} \right) + 2\varepsilon^p \left(4 + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \right], \\
 d_{22} &= 4 \cdot 2^p \left(1 - 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2 + \varepsilon^p \left(4 + 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2.
 \end{aligned}$$

因此由引理 4.7.1 (2), 又有

$$\begin{aligned}
 A^{-\frac{p}{2}} B^p A^{-\frac{p}{2}} &\leq \frac{1}{25} \left\{ 2^p \left(1 + 4 \cdot 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2 + 4\varepsilon^p \left(1 - 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - 2^{-\frac{p}{2}} \right) \left[2^{p+1} \left(1 + 4 \cdot 2^{-\frac{p}{2}} \right) + 2\varepsilon^p \left(4 + 2^{-\frac{p}{2}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 4 \cdot 2^p \left(1 - 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2 + \varepsilon^p \left(4 + 2^{-\frac{p}{2}} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{2^p}{25} \left(7 + 6 \cdot 2^{-\frac{p}{2}} + 12 \cdot 2^{-p} \right) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon^p}{25} \left(28 - 6 \cdot 2^{-\frac{p}{2}} + 3 \cdot 2^{-p} \right) \\
 &\leq \frac{2^p}{25} \left(35 + 15 \cdot 2^{-p} \right) \leq \frac{2^p}{5} \left(7 + 3 \cdot 2^{-p_0} \right). \quad (4.7.5)
 \end{aligned}$$

因为 $0 < (2\varepsilon)^{\frac{p_0}{4}} < \frac{(2 - 2^{1-\frac{p_0}{2}})^{\frac{1}{2}}}{7 + 3 \cdot 2^{-p_0}} < 1$, 故对 $p > p_0$,

$$(2\varepsilon)^{\frac{p}{4}} < \frac{(2 - 2^{1-\frac{p_0}{2}})^{\frac{1}{2}}}{7 + 3 \cdot 2^{-p_0}} < 1. \quad (4.7.6)$$

故由 (4.7.4), (4.7.5) 及 (4.7.6), 有

$$\begin{aligned} \|B^{-\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}B^{2p}A^{-\frac{p}{2}}B^{-\frac{p}{2}}\|^{\frac{1}{2}} &\geq \frac{\varepsilon^{-\frac{p}{4}}2^{\frac{3p}{4}}(2 - 2^{1-\frac{p_0}{2}})^{\frac{1}{2}}}{5} \\ &\geq \frac{2^p}{5}(7 + 3 \cdot 2^{-p_0}) \\ &\geq A^{-\frac{p}{2}}B^pA^{-\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

为完成定理 4.7.2 的证明, 只要利用定理 4.7.A 证明对充分小的 $\varepsilon > 0$ 有 $(AB^2A)^{\frac{1}{2}} \not\leq A^2$. 这又等价于证明

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 324 + 4\varepsilon^2 & -72 - 12\varepsilon^2 \\ -72 - 12\varepsilon^2 & 16 + 36\varepsilon^2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &\not\leq \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

令 $A_1 = 324 + 4\varepsilon^2$, $A_2 = 16 + 36\varepsilon^2$ 及 $A_3 = -72 - 12\varepsilon^2$. 由 [80], 如果令

$$V = \frac{1}{\sqrt{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1} \\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} \end{pmatrix},$$

其中

$$2\varepsilon_1 = -A_1 + A_2 + \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_3^2},$$

则

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \sqrt{A_1 + \varepsilon_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{A_2 - \varepsilon_1} \end{pmatrix} V.$$

故

$$B_1 = \frac{(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)\sqrt{A_1 + \varepsilon_1} + \varepsilon_1\sqrt{A_2 - \varepsilon_1}}{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1}. \quad (4.7.8)$$

当 ε 很小时, 就有 $2\varepsilon_1 = 32 + \frac{112}{17}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$,

$$\sqrt{A_1 + \varepsilon_1} = \sqrt{340} + o(\varepsilon),$$

$$A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1 = 340 + o(\varepsilon),$$

$$\varepsilon_1\sqrt{A_2 - \varepsilon_1} = o(1).$$

故由 (4.7.8), 有 $B_1 = \frac{324}{\sqrt{340}} + o(1)$. 又因 $\frac{324}{\sqrt{340}} > 17$, 故 (4.7.7) 对充分小的 $\varepsilon > 0$ 成立.

第五章 Furuta 不等式应用于若干算子类

5.1 几个算子单调函数

首先, 我们证明下述结果, 该结果对讨论算子类的包含关系方面具有十分重要的应用.

定理 5.1.1 设 A, B 均为正算子. 对固定的 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ 和 $0 < p_0 \leq 1$, 若

$$\begin{aligned} B^{p_0\beta_0} &\leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}}, \\ A^{p_0\alpha_0} &\geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}}, \end{aligned}$$

则对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 都有

$$\begin{aligned} B^{p_0\beta} &\leq \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{p_0\beta}{\alpha+\beta}}, \\ A^{p_0\alpha} &\geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{p_0\alpha}{\alpha+\beta}}, \end{aligned}$$

并且对每个固定的 $\alpha \geq \alpha_0$ 和 $q \geq -\alpha$ 及每个固定的 $\beta \geq \beta_0$ 和 $l \geq -\beta$, 函数

$$f_{\alpha,q}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^q A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{q+\alpha}{\alpha+\beta}} \quad \text{和} \quad g_{\beta,l}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^l B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{l+\beta}{\alpha+\beta}}$$

分别关于 β 和 α 在 $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 和 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, l\}$ 上递减和递增.

为证明这个结果, 首先证明下述引理:

引理 5.1.1 设 A, B 均为正算子. 若对固定的 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ 和 $0 < p_0 \leq 1$ 有

$$B^{p_0\beta_0} \leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}}, \quad (5.1.1)$$

则对任意的 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$B^{p_0\beta} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta}{\alpha_0+\beta}}, \quad (5.1.2)$$

且对固定的 $q \geq -\alpha_0$, 函数

$$f_{\alpha_0,q}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^q A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta}}$$

在 $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 上递降, 对任何 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_1} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_2} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_1+\alpha_0}{\alpha_0+\beta_2}}. \quad (5.1.3)$$

证 对 (5.1.1) 利用 Furuta 不等式, 则对任何 $p_1 \geq 1$ 和 $r_1 \geq 0$ 有

$$\left[B^{\frac{\beta_0 p_0 r_1}{2}} \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0 p_0 p_1}{\alpha_0+\beta_0}} B^{\frac{\beta_0 p_0 r_1}{2}}\right]^{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}} \geq B^{\beta_0 p_0(1+r_1)}.$$

取 $p_1 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\beta_0 p_0} \geq 1$, 则对任何 $r_1 \geq 0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0(1+p_0 r_1)}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0(1+p_0 r_1)}{2}}\right)^{\frac{(1+r_1)p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0(1+p_0 r_1)}} \geq B^{\beta_0 p_0(1+r_1)}.$$

令 $\beta = \beta_0(1 + p_0 r_1) \geq \beta_0$, 则

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\beta_0 p_0-\beta_0}{\alpha_0+\beta}} \geq B^{\beta+\beta_0 p_0-\beta_0}.$$

又因为

$$\beta + \beta_0 p_0 - \beta_0 - \beta p_0 = (\beta - \beta_0)(1 - p_0) \geq 0,$$

则 $\beta + \beta_0 p_0 - \beta_0 \geq \beta p_0$, 故由 L-H 不等式得

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta p_0}{\alpha_0+\beta}} \geq B^{\beta p_0}.$$

特别地, 当 $0 < \varepsilon \leq \beta p_0$ 时, 亦有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha_0+\beta}} \geq B^{\varepsilon}. \quad (5.1.4)$$

因此对每个 $q \geq -\alpha_0$, $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 及 $0 < \varepsilon \leq \beta p_0$, 由 (5.1.4) 知

$$\begin{aligned}
f_{\alpha_0, q}(\beta) &= \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^\beta A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta}} \\
&= \left[\left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^\beta A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha_0+\beta+\varepsilon}{\alpha_0+\beta}} \right]^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta+\varepsilon}} \\
&= \left[A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\frac{\beta}{2}} \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha_0+\beta}} B^{\frac{\beta}{2}} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right]^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta+\varepsilon}} \\
&\geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta+\varepsilon} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta+\varepsilon}} \\
&= f_{\alpha_0, q}(\beta + \varepsilon).
\end{aligned}$$

故函数 $f_{\alpha_0, q}(\beta)$ 关于 β 在 $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 上单调递减. 另外, 当 $q \geq \beta_0$ 时, 有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^q A^{\frac{\alpha_0}{2}} = f_{\alpha_0, q}(q) \geq f_{\alpha_0, q}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^\beta A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta}}$$

对任何 $\beta \geq q$ 成立. 故当 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 时, 令 $\beta_1 = q$, $\beta_2 = \beta$, 就有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_1} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_2} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_1+\alpha_0}{\alpha_0+\beta_2}}.$$

类似引理 5.1.1 的证明, 可证下面的引理 5.1.2.

引理 5.1.2 设 A, B 均为正算子. 若对固定的 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ 和 $0 < p_0 \leq 1$ 有

$$A^{p_0 \alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{p_0 \alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}},$$

则对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$ 有

$$A^{p_0 \alpha} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{p_0 \alpha}{\alpha+\beta_0}},$$

且对固定的 $l \geq -\beta_0$, 函数

$$g_{\beta, l}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^\alpha B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{l+\beta_0}{\alpha+\beta_0}}$$

在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, l\}$ 上递增, 对任何 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_0+\alpha_1}{\alpha_2+\beta_0}} \geq B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{\beta_0}{2}}.$$

下面证明定理 5.1.1.

定理 5.1.1 的证明 首先由引理 5.1.1 中 (5.1.3), 对任意的 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{\alpha_0 + \beta}}.$$

故由 $\frac{p_0 \alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0} \in [0, 1]$ 及 L-H 不等式可知

$$A^{p_0 \alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{p_0 \alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{p_0 \alpha_0}{\alpha_0 + \beta}}. \quad (5.1.5)$$

另一方面, 对 $A^{p_0 \alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{p_0 \alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0}}$ 应用引理 5.1.2, 对任意 $\alpha \geq \alpha_0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{\alpha + \beta_0}} \geq B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}.$$

从而又有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{p_0 \beta_0}{\alpha + \beta_0}} \geq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{p_0 \beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}} \geq B^{p_0 \beta_0}. \quad (5.1.6)$$

现对 (5.1.5) 和 (5.1.6) 分别利用引理 5.1.1 和引理 5.1.2 可得对任意的 $\alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0$ 有

$$A^{p_0 \alpha} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{p_0 \alpha}{\alpha + \beta}},$$

$$B^{p_0 \beta} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{p_0 \beta}{\alpha + \beta}},$$

并且当 $\alpha \geq \alpha_0$ 和 $q \geq -\alpha$ 时, $f_{\alpha, q}(\beta)$ 在 $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 上递降, 当

$\beta \geq \beta_0$ 和 $l \geq -\beta$ 时, $g_{\beta, l}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{l + \beta}{\alpha + \beta}}$ 在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, l\}$ 上递增.

注 观察定理 5.1.1 及引理 5.1.1 的证明, 当 $0 < \varepsilon \leq \beta + p_0 \beta_0 - \beta_0$ 时, (5.1.4) 仍成立, 从而可得如下结论:

命题 5.1.1 设 A, B 均为正算子, 对固定的 $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$ 和 $1 < p_0 \leq \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\max\{\alpha_0, \beta_0\}}$, 若

$$B^{p_0 \beta_0} \leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{p_0 \beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}},$$

$$A^{p_0\alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}},$$

则对任意 $\alpha \geq \alpha_0$ 和 $\beta \geq \beta_0$, 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^\alpha B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha+\beta_0}} \geq B^{p_0\beta_0}$$

及

$$A^{p_0\alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^\beta A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta}}.$$

与引理 5.1.1、引理 5.1.2 相仿, 有下列结果:

引理 5.1.3 设 A, B 均为正算子, 对固定的 α_0, β_0 满足 $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, -\beta_0 < \delta \leq \alpha_0, -\beta_0 \leq \bar{\delta} < \alpha_0$.

(1) 如果

$$B^{\beta_0+\delta} \leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\alpha_0+\beta_0}}, \quad (5.1.7)$$

那么对任意的 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$B^{\beta+\delta} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{\beta+\delta}{\alpha_0+\beta}}, \quad (5.1.8)$$

且对固定的 $\delta' \leq \alpha_0$, 函数

$$f_{\alpha, \delta'}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^\beta A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha_0-\delta'}{\alpha_0+\beta}}$$

在 $\beta \geq \max\{\beta_0, -\delta'\}$ 上递减, 特别地, 当 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 时, 有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_1} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_2} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_1+\alpha_0}{\alpha_0+\beta_2}}. \quad (5.1.9)$$

(2) 如果

$$A^{\alpha_0-\bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha_0-\bar{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}},$$

那么对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$ 有

$$A^{\alpha-\bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{\alpha-\bar{\delta}}{\alpha+\beta_0}},$$

且对固定的 $\delta'' \geq -\beta_0$, 函数

$$g_{\beta_0, \delta''}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^\alpha B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_0+\delta''}{\beta_0+\alpha}}$$

在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, \delta''\}$ 上递增, 特别地, 当 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_0$ 时, 有

$$B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_1} A^{\frac{\beta_0}{2}} \leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_0 + \alpha_1}{\beta_0 + \alpha_2}}.$$

利用引理 5.1.3 还可得到与定理 5.1.1 类似的下述结果:

定理 5.1.2 设 A, B 均为正算子, $\alpha_0, \beta_0 > 0$, $-\beta_0 < \delta \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \bar{\delta} < \alpha_0$. 若

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_0 + \delta}{\beta_0 + \alpha_0}} \geq B^{\beta_0 + \delta}$$

及

$$A^{\alpha_0 - \bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha_0 - \bar{\delta}}{\alpha_0 + \beta_0}},$$

则

(1) 对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{\beta + \delta}{\beta + \alpha}} \geq B^{\beta + \delta},$$

此外, 对每个固定的 $\alpha \geq \alpha_0$, $\delta' \leq \alpha$,

$$f_{\alpha, \delta'}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{\alpha - \delta'}{\alpha + \beta}}$$

是 β 在 $\beta \geq \max\{\beta_0, -\delta'\}$ 上的递减函数, 并对 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 有

$$A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta_1} A^{\frac{\alpha}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta_2} A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{\alpha + \beta_1}{\alpha + \beta_2}};$$

(2) 对任意 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 又有

$$A^{\alpha - \bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{\alpha - \bar{\delta}}{\alpha + \beta}},$$

且对每个固定的 $\beta \geq \beta_0$, $\delta'' \geq -\beta$ 有

$$g_{\beta, \delta''}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{\beta + \delta''}{\beta + \alpha}}$$

关于 α 在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, \delta''\}$ 上递增, 特别地, 对 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_0$ 有

$$B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{\beta}{2}} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{\beta + \alpha_1}{\beta + \alpha_2}}.$$

注 由上述定理和后面的引理 5.2.4 可得

推论 5.1.1 设 $A \geq 0$, $B \geq 0$, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $-\beta_0 < \delta_0 \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \bar{\delta}_0 < \alpha_0$. 则下列论断成立:

(1) 若 $0 \leq \delta_0 \leq \alpha_0$, 则对每个 $\alpha \geq \alpha_0$ 及 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta_0}{\beta_0+\alpha_0}} \geq B^{\beta_0+\delta_0} \Rightarrow \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta_0}{\beta+\alpha}} \geq B^{\beta+\delta_0},$$

从而对每个 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 及 $0 \leq \delta'_0 \leq \alpha$ 有

$$A^{\alpha-\delta'_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\delta'_0}{\alpha+\beta}}$$

(2) 若 $-\beta_0 \leq \bar{\delta}_0 \leq 0$, $N(A) \subseteq N(B)$, 则对每个 $\alpha \geq \alpha_0$ 及 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$A^{\alpha_0-\bar{\delta}_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\bar{\delta}_0}{\alpha_0+\beta_0}} \Rightarrow A^{\alpha-\bar{\delta}_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\bar{\delta}_0}{\alpha+\beta}},$$

从而对每个 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 及 $-\beta \leq \delta'_0 \leq 0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta'_0}{\beta+\alpha}} \geq B^{\beta+\delta'_0}.$$

5.2 $wF(p, r, q)$ 算子类

作为亚正常算子的推广, 1990 年 Aluthge 引入了 p -亚正常算子, 即若对某个 $p > 0$,

$$(T^*T)^p \geq (TT^*)^p,$$

则称 T 是 p -亚正常的. 进而对可逆的算子 T , 若有

$$\log(T^*T) \geq \log(TT^*),$$

则称 T 为对数-亚正常算子. 显见当 $0 < q \leq p$ 时, 每个 p -亚正常算子是 q -亚正常的, 每个可逆 p -亚正常算子是对数-亚正常的. 由于当 $X > 0$ 时

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{X^p - 1}{p} = \log X,$$

故有时把对数 - 亚正常算子看做是 0- 亚正常的. 继 p - 亚正常与对数 - 亚正常之后, 近年被许多作者加以定义一些更广泛的算子类. 定义如下:

定义 1 设 $k > 0$. 若

$$(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2,$$

则称 T 是 **属于 $A(k)$ 类的算子**, 特别地, $A(1)$ 类的算子 T 简称为 **A 类算子**, 即 $|T^2| \geq |T|^2$.

定义 2 设 $p > 0, r > 0$. 若

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{r}{p+r}} \geq |T^*|^{2r},$$

则称 T **属于 $A(p, r)$ 类**.

定义 3 设 $p > 0, r \geq 0$ 及 $q \geq 1$. 如果

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}, \quad (5.2.1)$$

则称 T **属于 $F(p, r, q)$ 算子类**.

显见, T 是 $A(k)$ 类的算子当且仅当 T 是 $A(k, 1)$ 类的算子, T 是 $A(p, r)$ 类算子当且仅当 T 是 $F(p, r, \frac{p+r}{r})$ 类的算子. 特别地, $F(1, 1, 2)$ 类算子是 A 类算子.

另一方面, 在 2000 年, Aluthge 利用算子 T 的 **Aluthge 变换**

$$\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$$

来定义一类新的算子, 称为 **w -亚正常的**, 如果 T 满足

$$|\tilde{T}| \geq |T| \geq |\tilde{T}^*|,$$

这里 $T = U|T|$ 是 T 的极分解. Ito 又定义了如下的算子类:

定义 4 如果对 $s > 0, t > 0$, T 满足

$$(|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t} \quad (5.2.2)$$

及

$$(|T|^s|T^*|^{2t}|T|^s)^{\frac{s}{s+t}} \leq |T|^{2s}, \quad (5.2.3)$$

则称 T **属于 $wA(s, t)$ 类**. $wA(1, 1)$ 类简称为 **wA 类**. 在 [67] 中 Ito 证明了 $A(s, t)$ 等价于 $wA(s, t)$.

我们仿照 $wA(s, t)$ 的定义, 可定义如下的一类算子, 本节结果可参见 [111].

定义 5 对 $p > 0$, $r > 0$ 及 $q \geq 1$, 如果 T 满足

$$(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} \quad (5.2.4)$$

及

$$(|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{1-\frac{1}{q}} \leq |T|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})}, \quad (5.2.5)$$

则称 T 属于 $wF(p, r, q)$ 类.

令 $\delta = \frac{p+r}{q} - r$, 则在定义 5.2.5 中, 有 $-r < \delta \leq p$, 并有

$$(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{r+\delta}{p+r}} \geq |T^*|^{2(r+\delta)} \quad (5.2.6)$$

及

$$(|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{\frac{p-\delta}{p+r}} \leq |T|^{2(p-\delta)}. \quad (5.2.7)$$

故 T 属于 $wA(p, r)$ 类当且仅当 T 属于 $wF(p, r, \frac{p+r}{r})$ 类. 为了得到 $wF(p, r, q)$ 算子的特征, 先给出下列引理:

引理 5.2.1 设 $A = A^*$, $B = B^*$, $N(X^*) \subseteq N(A)$ 及 $N(X^*) \subseteq N(B)$, 则 $X^*AX = X^*BX$ 蕴含 $A = B$.

证 由 $X^*AX = X^*BX$ 可知, 对 $x = Xy + z$, $z \in N(X^*)$, 我们有

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= (AXy, Xy + z) = (AXy, Xy) \\ &= (BXy, Xy) + (BXy, z) = (Bx, x). \end{aligned}$$

从而对 $H = N(X^*) + \overline{R(X)}$ 中的每个 x , 也有 $(Ax, x) = (Bx, x)$, 故 $A = B$.

引理 5.2.2 设 $A \geq 0$, $s > 0$, $E: H \rightarrow M$ 为正交投影, $N(E) \subseteq N(A)$, 则

$$A^s E = A^s, \quad EA^s = A^s, \quad EA^s E = A^s.$$

证 由于 E 为投影算子, 故 $E(EA^sE)E = EA^sE$. 由于

$$N(E) \subseteq N(A) = N(A^s), \quad N(E) \subseteq N(EA^sE),$$

故由引理 5.2.1 可得 $EA^sE = A^s$. 从而

$$EA^s = E^2A^sE = EA^sE = A^s = A^sE.$$

因此结论成立.

引理 5.2.3 设 $\alpha > 0, \beta > 0, A \geq 0$, 则

$$(1) \quad U^*U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha = (|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*U = U^*U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*U \\ = (|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha;$$

$$(2) \quad UU^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha = (|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha UU^* = UU^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha \\ UU^* = (|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha;$$

$$(3) \quad (U|T|^\beta A|T|^\beta U^*)^\alpha = U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*;$$

$$(4) \quad (U^*|T^*|^\beta A|T^*|^\beta U)^\alpha = U^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha U,$$

其中 $T = U|T|$ 是 T 的极分解.

证 由于 $T^* = U^*|T^*|$ 是 T^* 的一个极分解, 故只需证 (1), (3) 即可.

(1) 由定理 1.3.1 知 U^*U 是一个正交投影. 再由 $N(U) = N(|T|)$ 知

$$N(U^*U) = N(|T|) \subseteq N(|T|^\beta A|T|^\beta).$$

从而由引理 5.2.2 知 (1) 成立.

(3) 因对任意多项式 g 有

$$g(U|T|^\beta A|T|^\beta U^*) = Ug(|T|^\beta A|T|^\beta)U^*,$$

故 (3) 成立.

定理 5.2.1 下列三条件等价:

$$(1) \quad T \in wF(p, r, q);$$

$$(2) \quad |\tilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}} \geq |T|^{\frac{2(p+r)}{q}};$$

$$(3) \quad |T|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq |(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2(1-\frac{1}{q})},$$

其中 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 T 的广义 Aluthge 变换, 即 $\tilde{T}_{p,r} = |T|^p U |T|^r$.

证 由定理 1.3.4 (1), 有 (5.2.5) 等价于 (3). 另一方面, 由 (5.2.4) 知

$$U^*(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{1}{q}}U \geq U^*|T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}U.$$

再由引理 5.2.3 的 (1) 和 (4) 及 $U^*|T^*|^rU = |T|^r$, 得 (2) 成立. 反之, 由 (2) 又有

$$(|T|^rU^*|T|^{2p}U|T|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T|^{\frac{2(p+r)}{q}},$$

故

$$U(|T|^rU^*|T|^{2p}U|T|^r)^{\frac{1}{q}}U^* \geq U|T|^{\frac{2(p+r)}{q}}U^*.$$

再由引理 5.2.3 (3) 得 (5.2.4).

类似于定理 5.2.1 的证明可证得下面的定理:

定理 5.2.2 一个算子 T 属于 $wF(p, r, q)$ 当且仅当

$$|(\widetilde{T^*}_{r,p})^*|^{\frac{2}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}$$

及

$$|T^*|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq |\widetilde{T^*}_{r,p}|^{2(1-\frac{1}{q})},$$

其中 $\widetilde{T^*}_{r,p}$ 是 T^* 的广义 Aluthge 变换, 即 $\widetilde{T^*}_{r,p} = |T^*|^rU^*|T^*|^p$.

为说明 $wF(p, r, \frac{p+r}{\delta+r})$ 与 $F(p, r, \frac{p+r}{\delta+r})$ 在某些条件下的一致性, 先叙述几个引理.

引理 5.2.A 设 $A \geq 0$, 则

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A^{\frac{1}{2}}(A + \varepsilon I)^{-1}A^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A(A + \varepsilon I)^{-1} = P_{N(A)^\perp},$$

其中 P_M 表示到闭子空间 M 上的正交投影.

证 对 $\varepsilon > 0$ 及 $x \in R(A)$, 存在 $y \in H$ 使得 $x = Ay$, 再由 $0 \leq A(A + \varepsilon I)^{-1} \leq I$, 易得

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A(A + \varepsilon I)^{-1}x \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[(A + \varepsilon I)^{-1}(A + \varepsilon I)x - \varepsilon(A + \varepsilon I)^{-1}Ay \right] = x. \end{aligned}$$

从而 $\forall x \in \overline{R(A)} = N(A)^\perp$, 也有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A(A + \varepsilon I)^{-1}x = x.$$

进而 $\forall x = u + v \in H$, 其中 $u \in N(A)$, $v \in \overline{R(A)}$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A(A + \varepsilon I)^{-1}x = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (A + \varepsilon I)^{-1}Av = v = P_{N(A)^\perp}x.$$

利用引理 5.2.A, 可证下述引理:

引理 5.2.4 [67] 设 $A, B \geq 0$, 则对每个 $p, r \geq 0$, 有

$$(1) \left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r \text{ 蕴含 } \left(A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p}{p+r}} \leq A^p;$$

$$(2) \left(A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p}{p+r}} \leq A^p \text{ 且 } N(A) \subseteq N(B) \text{ 蕴含 } \left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r.$$

证 (1) 设 $\varepsilon > 0$. 由

$$(B^r + \varepsilon I)^{-1} \geq \left(\left| A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} \right|^{\frac{2r}{p+r}} + \varepsilon I \right)^{-1},$$

令 $A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} = U \left| A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} \right|$ 是 $A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}}$ 的极分解, 则有

$$\begin{aligned} & A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} (B^r + \varepsilon I)^{-1} B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}} \\ & \geq U \left| A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} \right| \left(\left| A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} \right|^{\frac{2r}{p+r}} + \varepsilon I \right)^{-1} \left| A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} \right| U^*. \end{aligned}$$

应用引理 5.2.A, 可得

$$A^p \geq A^{\frac{p}{2}} P_{N(B)^\perp} A^{\frac{p}{2}} \geq U \left| A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} \right|^{\frac{2p}{p+r}} U^* = \left(A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p}{p+r}}.$$

(2) 类似 (1) 可证.

由引理 5.2.4 及 L-H 不等式可得

引理 5.2.5 设 $\alpha_0, \beta_0 > 0$, 且 $-\beta_0 \leq \delta \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \bar{\delta} \leq \alpha_0$.

(1) 若 $0 \leq \delta \leq \alpha_0$, 且 $0 \leq \bar{\delta} \leq \alpha_0$, 则

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}} \right)^{\frac{\beta_0 + \delta}{\alpha_0 + \beta_0}} \geq B^{\beta_0 + \delta}$$

蕴含 $A^{\alpha_0-\bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\bar{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}}$.

(2) 若 $-\beta_0 \leq \delta \leq 0$, 且 $-\beta_0 \leq \bar{\delta} \leq 0$, 则

$$A^{\alpha_0-\bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\bar{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}}$$

且 $N(A) \subseteq N(B)$, 可蕴含 $\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\alpha_0+\beta_0}} \geq B^{\beta_0+\delta}$.

结合引理 5.2.5 及定理 5.1.2 又有

引理 5.2.6 设 $A, B \geq 0$, $\alpha_0, \beta_0 > 0$ 且 $-\beta_0 \leq \delta \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \bar{\delta} \leq \alpha_0$.

(1) 若 $0 \leq \delta \leq \alpha_0$ 及

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\alpha_0+\beta_0}} \geq B^{\beta_0+\delta},$$

则对任意 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$, 及 $0 \leq \bar{\delta} \leq \alpha$, 有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta}{\alpha+\beta}} \geq B^{\beta+\delta}$$

及

$$A^{\alpha-\bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\bar{\delta}}{\alpha+\beta}}.$$

(2) 若 $-\beta_0 \leq \bar{\delta} \leq 0$, 则

$$A^{\alpha_0-\bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\bar{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}}$$

且 $N(A) \subseteq N(B)$, 可蕴含

$$A^{\alpha-\bar{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\bar{\delta}}{\alpha+\beta}}$$

及

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta}{\alpha+\beta}} \geq B^{\beta+\delta},$$

其中 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 且 $-\beta \leq \delta \leq 0$.

定理 5.2.3 设 $p > 0$, $r \geq 0$ 且 $0 \leq \delta \leq p$, $\delta + r \neq 0$, 则 $wF\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$

类与 $F\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$ 一致.

证 由 $T \in F\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$, 有

$$(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{\delta+r}{p+r}} \geq |T^*|^{2(p+r)\frac{\delta+r}{p+r}} = |T^*|^{2(\delta+r)}.$$

由引理 5.2.5 (1), 得

$$|T|^{2(p-\delta)} \geq (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{\frac{2(p-\delta)}{2p+2r}} = (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{\frac{p-\delta}{p+r}}.$$

故 $T \in wF\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$.

定理 5.2.4 设 T 是 $wF\left(p_0, r_0, \frac{p_0+r_0}{\delta_1+r_0}\right)$ 类算子, 其中 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$ 及 $-r_0 < \delta_1 \leq p_0$, 则对 $p \geq p_0$ 及 $r \geq r_0$, T 是 $wF\left(p, r, \frac{p+r}{\delta_1+r}\right)$ 类算子.

证 (1) 当 $r_0 > 0$ 且 $-r_0 < \delta_1 < p_0$ 时, 由定理 5.1.2 应用于 $B = |T^*|$, $A = |T|$, $\alpha_0 = 2p_0$, $\beta_0 = 2r_0$, $\delta = 2\delta_1$, $\bar{\delta} = 2\delta_1$, $\alpha = 2p$, $\beta = 2r$ 可知.

(2) 当 $r_0 > 0$, $\delta_1 = p_0$ 时, 由引理 5.2.6 可知.

(3) 若 $r_0 = 0$, 则 T 是 δ_1 亚正常的. 故当 $p \geq p_0 \geq \delta_1$ 及 $r \geq 0$ 时有 $T \in F\left(p, r, \frac{p+r}{\delta_1+r}\right)$, 这是下面定理 5.2.A 的一个直接结果.

定理 5.2.A ^[33] (1) 对一个固定的 $k > 0$, T 是 k -亚正常的当且仅当

$$T \in F(2kp, 2kr, q),$$

其中 $p > 0$, $r \geq 0$, $q \geq 1$ 且 $(1+2r)q \geq 2(p+r)$, 或者等价地对 $p > 0$, $r \geq 0$ 及 $q \geq 1$ 使得 $(k+r)q \geq p+r$, $T \in F(p, r, q)$.

(2) 设 T 是 $F(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 其中 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$ 及 $q_0 \geq 1$, 则 T 是 $F(p_0, r_0, q)$ 类算子, 其中 $q \geq q_0$.

(3) 设 $r_0 \geq 0$, $p_0 > 0$, $-r_0 < \delta_0 \leq p_0$, 且 T 是一个 $F\left(p_0, r_0, \frac{p_0+r_0}{\delta_0+r_0}\right)$

类算子, 则

(a) 当 $r \geq r_0$ 时, T 是 $F\left(p_0, r, \frac{p_0+r}{\delta_0+r}\right)$ 类算子;

(b) 当 $p \geq p_0$, $r \geq r_0$, $0 \leq \delta_0 \leq p_0$ 时, T 是 $F\left(p, r, \frac{p+r}{\delta_0+r}\right)$ 类算子.

定理 5.2.A (1) 可由 Furuta 不等式直接得出; (2) 由 L-H 不等式可得; (3) 由引理 5.1.3 和引理 5.2.6 可知.

由定理 5.2.3 及定理 5.2.A (2) 又可得下面的推论:

推论 5.2.1 设 T 是 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 其中 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$, $r_0 q_0 \leq r_0 + p_0$ 及 $q_0 \geq 1$, 则 T 是 $wF(p_0, r_0, q)$ 类算子, 其中 $q \geq q_0$ 且 $r_0 q \leq r_0 + p_0$.

再由定理 5.2.3、定理 5.2.4 及推论 5.2.1 知下列结果成立:

推论 5.2.2 设 $1 \geq p > 0$, $1 \geq r \geq 0$ 及 $0 \leq \delta \leq p$, $\delta + r \neq 0$. 如果 T 是 $wF\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$ 类算子, 则 T 是 A 类算子.

证 由定理 5.2.4 及推论 5.2.1 知, T 是 $wF(1, 1, 2)$ 类算子, 故 T 是 $F(1, 1, 2)$ 类算子, 从而是 A 类算子.

最后, 由定理 5.2.3、定理 5.2.4 又有

推论 5.2.3 设 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$, 且 $0 < \delta \leq p_0$. 如果 T 是 $F\left(p_0, r_0, \frac{p_0+r_0}{\delta+r_0}\right)$ 类算子, 则 T 是 $F\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$ 类算子, 其中 $p \geq p_0$, $r \geq r_0$.

为了考虑 $wF(p, r, q)$ 类算子的幂的性质. 需要下列结果:

定义在集合 I 上的实值函数 $f(x)$, 称为是 **算子凸的**, 如果对任意谱位于 I 中的自伴算子 A, B 和任意 $\lambda \in [0, 1]$ 都有

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B).$$

定理 5.2.B (Jensen 不等式)^[62] 设 f 是一个定义在 $[0, \alpha)$ 上的实值连续函数, 则下列结果等价:

- (1) f 是算子凸函数, 且 $f(0) \leq 0$;
- (2) $A^* f(X) A \geq f(A^* X A)$, 对一切压缩算子 A 及 $X \geq 0$, 且 $\sigma(X) \subseteq [0, \alpha)$ 成立;

(3) 对一切满足 $A^*A + B^*B \leq I$ 的算子 A, B 和一切谱位于 $[0, \alpha)$ 内的算子 X, Y 有

$$f(A^*XA + B^*YB) \leq A^*f(X)A + B^*f(Y)B;$$

(4) 对每个投影 P 和每个谱位于 $[0, \alpha)$ 的自伴算子 X 有

$$f(PXP) \leq Pf(X)P;$$

(5) $t \rightarrow t^{-1}f(t)$ 是 $(0, \alpha)$ 上的算子单调函数;

如果还有 $f \leq 0$, 则上面条件当 $\alpha = +\infty$ 时又等价于

(6) $-f$ 是 $[0, \alpha)$ 上的算子单调函数.

证 (1) \Rightarrow (2) 考虑 $H \oplus H$ 上的算子,

$$X_1 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & A^* \end{pmatrix},$$

其中 $C = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $B = (I - AA^*)^{\frac{1}{2}}$. 易见, U, V 是酉算子, 故 U^*XU, V^*XV 的谱还在 $[0, \alpha)$ 中, 于是由 $f(0) \leq 0$ 得

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f(A^*XA) & 0 \\ 0 & f(B^*XB) \end{pmatrix} \\ &= f \begin{pmatrix} A^*XA & 0 \\ 0 & B^*XB \end{pmatrix} = f \left(\frac{1}{2} (U^*X_1U + V^*X_1V) \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (U^*f(X_1)U + V^*f(X_1)V) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[U^* \begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U + V^* \begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V \right] \\ &= \begin{pmatrix} A^*f(X)A & 0 \\ 0 & Bf(X)B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

比较其对应元素可知 (2) 成立.

(2) \Rightarrow (3) 令

$$a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

则有

$$f(a^*xa) \leq a^*f(x)a.$$

比较其对应元素可知 (3) 成立.

(3) \Rightarrow (4) 显见.

(4) \Rightarrow (1) 对任意谱位于 $[0, \alpha]$ 中的自伴算子 X, Y 和任意 $\lambda \in [0, 1]$, 令

$$x = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} & -(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \\ (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} & \lambda^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$f(PU^*xUP) \leq PU^*f(x)UP.$$

比较其对应元素可知 (1) 成立.

(2) \Rightarrow (5) 对任意谱位于 $(0, \alpha)$ 中的自伴算子 X, Y 且 $X \leq Y$, 令 $A = Y^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}$, 则 $\|A\| \leq 1$, 故有

$$f(X) = f(A^*YA) \leq A^*f(Y)A = X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}f(Y)Y^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $X^{-1}f(X) \leq Y^{-1}f(Y)$.

(5) \Rightarrow (2) 不妨设 X 可逆, 且 $\|X\| < \alpha$, 取 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\|(1+\varepsilon)X\| \leq \alpha.$$

对任意投影 P 有 $X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon + P)X^{\frac{1}{2}} \leq (1+\varepsilon)X$, 由 (5) 得

$$\begin{aligned} X^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon + P)^{-1}X^{-\frac{1}{2}}f\left(X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon + P)X^{\frac{1}{2}}\right) \\ \leq (1+\varepsilon)^{-1}X^{-1}f\left((1+\varepsilon)X\right). \end{aligned}$$

左右两边分别乘以 $PX(\varepsilon + P)X^{\frac{1}{2}}$ 和 $X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon + P)XP$, 得

$$\begin{aligned} PX^{\frac{1}{2}}f\left(X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon + P)X^{\frac{1}{2}}\right)X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon + P)XP \\ \leq PX(\varepsilon + P)(1+\varepsilon)^{-1}f\left((1+\varepsilon)X\right)(\varepsilon + P)XP. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$PX^{\frac{1}{2}}\left[f\left(X^{\frac{1}{2}}PX^{\frac{1}{2}}\right)X^{\frac{1}{2}}P\right]PXP \leq PXP(Pf(X)P)PXP.$$

再由 $f\left(X^{\frac{1}{2}}PX^{\frac{1}{2}}\right)X^{\frac{1}{2}}P = X^{\frac{1}{2}}Pf(PXP)$, 得

$$PXP(Pf(PXP)P)PXP \leq PXP(Pf(X)P)PXP.$$

由 $N(PXP) \subseteq N(P)$ 及 PXP 自伴, 得

$$Pf(PXP)P \leq Pf(X)P.$$

由于 $t^{-1}f(t)$ 是算子单调增加的, 故 $f(0) \leq 0$. 令 $g(t) = f(t) - f(0)$, 得

$$\begin{aligned} f(PXP) &= g(PXP) + f(0) \leq g(PXP) + f(0)P \\ &= P(g(PXP) + f(0))P = Pf(PXP)P \\ &\leq Pf(X)P. \end{aligned}$$

(1) \Rightarrow (6) 对任意谱位于 $[0, \alpha]$ 中的自伴算子 X, Y 且 $X \leq Y$, 取 $\lambda \in (0, 1)$, 因 $\lambda Y = \lambda X + (1 - \lambda) \left[\frac{\lambda}{1 - \lambda} (Y - X) \right]$ 及 $f \leq 0$, 得

$$f(\lambda Y) \leq \lambda f(X) + (1 - \lambda) f\left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} (Y - X)\right) \leq \lambda f(X).$$

令 $\lambda \rightarrow 1$, 则 $f(Y) \leq f(X)$.

(6) \Rightarrow (2) 仍采用 (1) \Rightarrow (2) 中的记号. 取充分大的 λ 使得

$$\begin{aligned} U^* \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U &= \begin{pmatrix} A^*XA & A^*XB \\ BX A & BX B \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} A^*XA + \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = Y, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A^*f(X)A & A^*f(X)B \\ Bf(X)A & Bf(X)B \end{pmatrix} \\ &= U^* \begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U \geq U^* \begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix} U \\ &= U^*f(X_1)U = f(U^*X_1U) \geq f(Y). \end{aligned}$$

故 $A^*f(X)A \geq f(A^*XA + \varepsilon)$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即可.

定理 5.2.C ^[19] 设 $A, B \in B(H)$, 则下列条件等价:

- (1) $R(A) \subseteq R(B)$;
- (2) $AA^* \leq \lambda BB^*$, 对某个 $\lambda \geq 0$;
- (3) 存在 $C \in B(H)$, 使 $A = BC$.

此外, 如果上述三条件成立, 则存在唯一的算子 C 使 $A = BC$,

- (a) $\|C\|^2 = \inf\{\mu | AA^* \leq \mu BB^*\}$;
- (b) $N(A) = N(C)$;
- (c) $R(C) \subseteq \overline{R(B^*)}$.

证 (I) 由

$$AA^* = BCC^*B^* \leq \|C\|^2 BB^*,$$

有 (3) 蕴含 (1) 和 (2).

(II) (1) \Rightarrow (3) 由 $R(A) \subseteq R(B)$, 故对任意 $f \in H$, 必有唯一 $h \in N(B)^\perp$, 使得 $Bh = Af$. 故在 H 上可定义算子 C_1 , 使得 $C_1f = h$, 则有 $A = BC_1$.

下面用闭图像定理证明 C_1 有界.

事实上, 若 $f_n \rightarrow f$, $C_1f_n \equiv h_n \rightarrow h$, 则

$$Af_n \rightarrow Af, \quad Bh_n \rightarrow Bh,$$

由于 $Bh_n = Af_n$, 得 $h = C_1f$.

(III) (2) \Rightarrow (3) 设 $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$, 定义映射 $D: R(B^*) \rightarrow R(A^*)$, 使得 $B^*f \rightarrow A^*f$. 显见 D 有定义, 且

$$\begin{aligned} \|D(B^*f)\|^2 &= \|A^*f\|^2 = (AA^*f, f) \\ &\leq \lambda^2 (BB^*f, f) = \lambda^2 \|B^*f\|^2. \end{aligned}$$

故 D 可有界延拓到 $\overline{R(B^*)}$ 上. 如果在 $R(B^*)^\perp$ 上定义 D 为 0, 则 D 在整个 H 上有定义, 且 $DB^* = A^*$, 从而 $A = BD^*$. 令 $C_2 = D^*$, 则有 (3) 成立, 且 $\|C_2\|^2 \leq \lambda^2$, 再由 (I) 得 (a). 因为

$$N(C_2) = R(D)^\perp = R(A^*)^\perp = N(A),$$

故 (b) 成立. 最后由 $R(B^*)^\perp \subseteq N(D) = R(C_2)^\perp$ 得 (c) 成立.

(IV) 唯一性. 若 E 也是满足这些条件的算子, 则

$$E^*B^* = A^* = C_2^*B^*,$$

故在 $\overline{R(B^*)}$ 上, $E^* = C_2^*$. 又对 $f \in R(B^*)^\perp \subseteq R(E)^\perp = N(E^*)$, 再由 D 的定义有 $E^*f = 0 = C_2^*f$, 故 $E^* = C_2^*$. 即 $C_2 = E$.

定理 5.2.D ^[65] 设 $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $1 \leq q$ 且 $rq \leq p+r$, 如果 T 是可逆的 $F(p, r, q)$ 算子, 则 T^n 是 $F\left(\frac{p}{n}, \frac{r}{n}, q\right)$ 算子.

证 令 $\delta = \frac{p+r}{q} - r$, 则 $0 \leq \delta \leq p$. 故由推论 5.2.3 知, $T \in F\left(1, 1, \frac{2}{1+\delta}\right) \subseteq F(1, 1, 2)$, 即 T 是 A 类算子. 故由下面定理 5.2.F 得

$$|T^n|^{\frac{2}{n}} \geq \cdots \geq |T^2| \geq |T|^2, \quad (5.2.8)$$

且

$$|T^*|^2 \geq |(T^2)^*| \geq \cdots \geq |(T^n)^*|^{\frac{2}{n}}. \quad (5.2.9)$$

由 $T \in F(p, r, q)$, 知

$$(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}.$$

故

$$|T|^p (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{\frac{1}{q}-1} |T|^p \geq |T^*|^{2(\frac{p+r}{q}-r)}.$$

再由 (5.2.9) 和 L-H 不等式, 得

$$|T|^p \left(|T|^p |T^{n*}|^{\frac{2r}{n}} |T|^p \right)^{\frac{1}{q}-1} |T|^p \geq |T^*|^{2(\frac{p+r}{q}-r)} \geq |T^{n*}|^{\frac{2}{n}(\frac{p+r}{q}-r)}.$$

将上式两边乘以 $|T^{n*}|^{\frac{r}{n}}$, 可得

$$\left(|T^{n*}|^{\frac{r}{n}} |T|^{2p} |T^{n*}|^{\frac{r}{n}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq |T^{n*}|^{\frac{2(p+r)}{nq}}.$$

再由 (5.2.8) 可知结论成立.

定理 5.2.E ^[97] 设 T 是 ωA 算子, 则

$$|T^n|^{\frac{2}{n}} \geq \cdots \geq |T^2| \geq |T|^2,$$

且

$$|T^*|^2 \geq |(T^2)^*| \geq \cdots \geq |(T^n)^*|^{\frac{2}{n}}.$$

证 令 $A_n = |T^n|^{\frac{2}{n}}$, $B_n = |T^{n*}|^{\frac{2}{n}}$. 则

$$\left(B_1^{\frac{1}{2}} A_1 B_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geq B_1$$

及

$$A_1 \geq \left(A_1^{\frac{1}{2}} B_1 A_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面用归纳法证明

$$A_{n+1}^n = |T^{n+1}|^{\frac{2n}{n+1}} \geq |T^n|^2 = A_n^n \quad (5.2.10)$$

及

$$B_n^n = |T^{n*}|^2 \geq |(T^{n+1})^*|^{\frac{2n}{n+1}} = B_{n+1}^n. \quad (5.2.11)$$

当 $n=1$ 时显然成立. 假设对 $n \leq k-1$ 时结论成立, 则有

$$A_k \geq A_{k-1} \geq \cdots \geq A_2 \geq A_1.$$

可验证下列条件成立:

(*) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_1^{\frac{1}{2}} x_n = 0$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k^{\frac{1}{2}} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k^{\frac{1}{2}} x_n = 0$.

从而由下面的引理 5.2.7 知

$$A_k \geq \left(A_k^{\frac{1}{2}} B_1 A_k^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 5.1.2 知

$$\left(B_1^{\frac{1}{2}} A_k^k B_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{k}{k+1}} \geq B_1^{\frac{1}{2}} A_k^{k-1} B_1^{\frac{1}{2}}.$$

再由归纳假设, 得

$$\left(B_1^{\frac{1}{2}} A_k^k B_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{k}{k+1}} \geq B_1^{\frac{1}{2}} A_k^{k-1} B_1^{\frac{1}{2}} \geq B_1^{\frac{1}{2}} A_{k-1}^{k-1} B_1^{\frac{1}{2}},$$

即

$$(|T^*| |T^k|^2 |T^*|)^{\frac{k}{k+1}} \geq |T^*| |T^{k-1}|^2 |T^*|.$$

于是

$$|T^{k+1}|^{\frac{2k}{k+1}} = U^* (|T^*| |T^k|^2 |T^*|)^{\frac{k}{k+1}} U \\ \geq U^* |T^*| |T^{k-1}|^2 |T^*| U = |T^k|^2.$$

于是 (5.2.10) 对 $n = k$ 成立. 类似地可证另外一个不等式.

定理 5.2.F [32],[66],[94],[95] T 是一个可逆算子, 则 T 是对数-亚正常当且仅当对一切 $p > 0$ 及 $r > 0$, T 是 $A(p, r)$ 类算子.

引理 5.2.G [97] 设 A, B, C 是定理 5.2.C 中所述的算子, 则下列两个条件等价:

$$(1) \overline{R(C)} = \overline{R(B^*)};$$

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^* x_n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} B^* x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} B^* x_n = 0$ 对 H 中任意向量列 $\{x_n\}$ 成立.

证 (1) \Rightarrow (2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} B^* x_n = y$, 则 $y \in \overline{R(B^*)} = \overline{R(C)}$. 另一方面, 由 $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A^* x_n = C^* y$, 知 $y \in N(C^*)$. 故 $y = 0$.

(2) \Rightarrow (1) 只需证明 $N(C^*) \subseteq N(B)$. 任给 $y \in N(C^*)$, 令

$$y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in N(B), \quad y_2 \in N(B)^\perp = \overline{R(B^*)},$$

则存在 $x_n \in H$ 使得 $B^* x_n \rightarrow y_2$. 于是

$$A^* x_n = C^* B^* x_n \rightarrow C^* y_2 = 0.$$

故 $y_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} B^* x_n = 0$. 从而结论成立.

引理 5.2.H [67] 设 $A = A^*$, $B = B^*$, $N(X^*) \subseteq N(A)$, 且 $N(X^*) \subset N(B)$, 则 $X^* A X \geq X^* B X$ 可蕴含 $A \geq B$.

引理 5.2.7 设 $A, B \geq 0$, $0 < p \leq 1$, $0 < r \leq 1$, $\frac{p+r}{r} \geq q \geq 1$. 则下列说法成立:

$$(1) \text{ 若 } \left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+r}{q}}, \text{ 且 } B \geq C \geq 0, \text{ 则}$$

$$\left(C^{\frac{r}{2}} A^p C^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq C^{\frac{p+r}{q}}.$$

$$(2) \text{ 若 } B^{\frac{p+r}{q}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} C^p B^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ 且 } A \geq B \text{ 及下面条件 } (*) \text{ 成立:}$$

(*) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} B^{\frac{1}{2}} x_n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{1}{2}} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{1}{2}} x_n = 0$, 并
 中 $\{x_n\}$ 是任意向量列,
 则 $A^{\frac{p+r}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} C^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$.

证 (1) 由 L-H 不等式知 $B^r \geq C^r$. 故由定理 5.2.C, 存在压缩算子 X 使得

$$C^{\frac{r}{2}} = B^{\frac{r}{2}} X = X^* B^{\frac{r}{2}}.$$

故由 Jensen 不等式和 $\frac{p+r}{q} - r \in [0, 1]$ 知

$$\begin{aligned} (C^{\frac{r}{2}} A^p C^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} &= (X^* B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}} X)^{\frac{1}{q}} \geq X^* (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} X \\ &\geq X^* B^{\frac{p+r}{q}} X \geq X^* (B^{\frac{r}{2}} B^{\frac{p+r}{q}-r} B^{\frac{r}{2}}) X \\ &\geq C^{\frac{r}{2}} C^{\frac{p+r}{q}-r} C^{\frac{r}{2}} = C^{\frac{p+r}{q}}. \end{aligned}$$

(2) 由 L-H 不等式知 $A^r \geq B^r$. 故由定理 5.2.C, 存在压缩算子 X 使得

$$B^{\frac{r}{2}} = A^{\frac{r}{2}} X = X^* A^{\frac{r}{2}}.$$

故由 $\frac{p+r}{q} - r \in [0, 1]$ 知

$$\begin{aligned} X^* (A^{\frac{r}{2}} C^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} X &\leq (X^* A^{\frac{r}{2}} C^p A^{\frac{r}{2}} X)^{\frac{1}{q}} = (B^{\frac{r}{2}} C^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \\ &\leq B^{\frac{p+r}{q}} = B^{\frac{r}{2}} B^{\frac{p+r}{q}-r} B^{\frac{r}{2}} \\ &\leq B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p+r}{q}-r} B^{\frac{r}{2}} \\ &= X^* A^{\frac{p+r}{q}} X. \end{aligned}$$

下面我们来验证下列条件成立:

若 $\{x_n\} \subseteq H$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} B^{\frac{r}{2}} x_n = 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{r}{2}} x_n$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{r}{2}} x_n = 0.$$

事实上, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} B^{\frac{r}{2}} x_n = 0$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} B^{\frac{1}{2}} x_n = 0$ 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{r}{2}} x_n$ 存在蕴含 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{1}{2}} x_n$ 存在. 故由条件 (*) 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{1}{2}} x_n = 0$. 进而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{r}{2}} x_n \in \overline{R(A^{\frac{r}{2}})} = \overline{R(A)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{r}{2}} x_n \in N(A^{\frac{1-r}{2}}) = N(A).$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{r}{2}} x_n \in N(A) \cap \overline{R(A)} = \{0\}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{r}{2}} x_n = 0$. 由引理 5.2.G 可知 $\overline{R(A^{\frac{r}{2}})} = \overline{R(X)}$, 故

$$N(X^*) \subseteq N(A^{\frac{r}{2}}), \quad N(X^*) \subseteq N((A^{\frac{r}{2}} C^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}).$$

由引理 5.2.H 可知结论成立.

定理 5.2.5 设 $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, 且当 $r = 0$ 时, $q \geq 1$, 当 $r > 0$ 时, 取 q 使 $\frac{p+r}{r} \geq q \geq 1$, 则当 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子时, T^n 是 $wF(\frac{p}{n}, \frac{r}{n}, q)$ 类算子.

证 令 $\delta = \frac{p+r}{q} - r$, 则 $0 \leq \delta \leq p$, 且

$$(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{r+\delta}{p+r}} \geq |T^*|^{2(r+\delta)}$$

及

$$|T|^{2(p-\delta)} \geq (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{\frac{p-\delta}{p+r}}.$$

由推论 5.2.2 知, T 是 A 类算子 (即 wA 类), 令 $A_n = |T^n|^{\frac{2}{n}}$, $B_n = |(T^n)^*|^{\frac{2}{n}}$, 由定理 5.2.E 知

$$A_n \geq \cdots \geq A_2 \geq A_1, \quad B_1 \geq B_2 \geq \cdots \geq B_n.$$

如果 $r = 0$, 由 $|T|^{\frac{2p}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2p}{q}}$ (因 $T \in wF(p, 0, q)$), 故

$$A_n^{\frac{p}{q}} \geq A_1^{\frac{p}{q}} \geq B_1^{\frac{p}{q}} \geq B_n^{\frac{p}{q}},$$

因此 T^n 是 $wF\left(\frac{p}{n}, 0, q\right)$ 算子.

如果 $1 \geq r > 0$, 由 L-H 不等式及引理 5.2.7 有

$$\left(B_n^{\frac{r}{2}} A_n^p B_n^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(B_n^{\frac{r}{2}} A_1^p B_n^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq B_n^{\frac{p+r}{q}},$$

即

$$\left(|(T^n)^*|^{\frac{r}{n}} |T^n|^{\frac{2p}{n}} |(T^n)^*|^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq |(T^n)^*|^{\frac{2(p+r)}{nq}}.$$

再由引理 5.2.5 知

$$|T^n|^{\frac{2(p+r)}{n}(1-\frac{1}{q})} \geq \left(|T^n|^{\frac{p}{n}} |(T^n)^*|^{\frac{2r}{n}} |T^n|^{\frac{p}{n}}\right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

故 T^n 是 $wF\left(\frac{p}{n}, \frac{r}{n}, q\right)$ 类算子.

利用定理 5.2.5 可知有下列推论:

推论 5.2.4 设 p, r, q 如定理 5.2.5 所述, 且 T 是 $F(p, r, q)$ 算子时, 则 T^n 是 $F\left(\frac{p}{n}, \frac{r}{n}, q\right)$ 类算子.

由定理 5.2.D 知

推论 5.2.5 设 $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $q \geq 1$, 且 $rq \leq p+r$, 则当 T 是可逆的 $wF(p, r, q)$ 算子时, T^n 是 $wF\left(\frac{p}{n}, \frac{r}{n}, q\right)$ 类算子.

特别地, 可得一个 p ($0 < p \leq 1$)-亚正常算子 T 的 n 次幂 T^n 是 $\frac{p}{n}$ -亚正常算子, 一个对数亚正常算子 T 的 n 次幂仍是对数-亚正常算子.

最后, 我们来讨论一下一个 $wF(p, r, q)$ 类算子何时为正常算子.

首先给出几个引理.

引理 5.2.8 ^[67] 设 $A, B \geq 0$, 且 $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} \geq B^2$, $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \geq A^2$. 则 $A = B$.

证 令 $E = P_{\overline{R(A)}}$, $F = P_{\overline{R(B)}}$, 于是有

$$B^{\frac{1}{2}}FAFB^{\frac{1}{2}} \geq B^2.$$

因为 $N(B) = N\left(B^{\frac{1}{2}}\right) \subseteq N(FAF)$, 由引理 5.2.H 得

$$\left(A^{\frac{1}{2}}FA^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A^{\frac{1}{2}}FAFA^{\frac{1}{2}} \geq A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \geq A^2.$$

故

$$A^{\frac{1}{2}}EFEA^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}FA^{\frac{1}{2}} \geq A = A^{\frac{1}{2}}EA^{\frac{1}{2}}.$$

再由引理 5.2.H 得 $EFE \geq E$, 从而 $EFE = E$, 即 $E(I-F)E = 0$, 这又蕴含 $E(I-F)^{\frac{1}{2}} = 0$, 因此

$$E = EF = FE = (FEF)^{\frac{1}{2}} \leq F,$$

故 $A \geq B$; 又由对称性可知 $B \geq A$.

引理 5.2.9 设 $A, B \geq 0$, $p_i, r_i > 0$, $-r_i < \delta_i \leq p_i$, $-r_i \leq \bar{\delta}_i < p_i$, $i = 1, 2$. 则下列条件等价:

$$(1) \quad A = B;$$

$$(2) \quad B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}} = B^{p_1+r_1} \text{ 及 } A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}} = B^{p_2+r_2};$$

$$(3) \quad \left(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{r_1+\delta_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1+\delta_1}, \quad A^{p_1-\bar{\delta}_1} \geq \left(A^{\frac{p_1}{2}}B^{r_1}A^{\frac{p_1}{2}}\right)^{\frac{p_1-\bar{\delta}_1}{p_2+r_2}},$$

$$\left(A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{r_2+\delta_2}{p_2+r_2}} \geq A^{r_2+\delta_2}, \quad B^{p_2-\bar{\delta}_2} \geq \left(B^{\frac{r_2}{2}}A^{p_2}B^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{p_2-\bar{\delta}_2}{p_2+r_2}}.$$

特别地, 当 $0 \leq \delta_i \leq p_i$, $i = 1, 2$ 时, (1)~(3) 又等价于

$$(4) \quad \left(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{r_1+\delta_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1+\delta_1}, \quad \left(A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{r_2+\delta_2}{p_2+r_2}} \geq A^{r_2+\delta_2}.$$

证 (2) \Rightarrow (1) 取 $s > \max\{p_1, p_2, r_1, r_2\}$, 则由 (2) 可知

$$\left(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{p_1+r_1}{s}} = B^{r_1+p_1},$$

$$\left(A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{p_2+r_2}{s}} = A^{r_2+p_2}.$$

应用引理 5.2.6 得

$$\left(B^{\frac{s}{2}}A^sB^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+p_1}{2s}} \geq B^{s+p_1}, \quad A^{s-p_1} \geq \left(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_1}{2s}},$$

以及

$$\left(A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+p_2}{2s}} \geq A^{s+p_2}, \quad B^{s-p_2} \geq \left(B^{\frac{s}{2}} A^s B^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_2}{2s}}.$$

故

$$A^{s-p_1} = \left(A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_1}{2s}}, \quad B^{s-p_2} = \left(B^{\frac{s}{2}} A^s B^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_2}{2s}}.$$

再由引理 5.2.8 可知 $A = B$.

(3) \Rightarrow (1) 设 $s > \max\{p_1, p_2, r_1, r_2\}$. 则由 (3) 及定理 5.1.2 可知

$$\begin{aligned} \left(B^{\frac{s}{2}} A^s B^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2s}} &\geq B^{s+\delta_1}, \quad A^{s-\bar{\delta}_1} \geq \left(A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\bar{\delta}_1}{2s}}, \\ \left(A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+\delta_2}{2s}} &\geq A^{s+\delta_2}, \quad B^{s-\bar{\delta}_2} \geq \left(B^{\frac{s}{2}} A^s B^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\bar{\delta}_2}{2s}}. \end{aligned}$$

于是

$$A^{s-\bar{\delta}_1} = \left(A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\bar{\delta}_1}{2s}}, \quad B^{s-\bar{\delta}_2} = \left(B^{\frac{s}{2}} A^s B^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\bar{\delta}_2}{2s}}.$$

故再由引理 5.2.8 可知 $A = B$.

(4) \Rightarrow (1) 由引理 5.2.5 及 (3) \Rightarrow (1) 可得证.

利用引理 5.2.9 可得

定理 5.2.6 设 $p_i, r_i > 0$ 及 $q_i \geq 1, i = 1, 2$. 若 T 是 $\omega F(p_1, r_1, q_1)$ 类算子, T^* 是 $\omega F(p_2, r_2, q_2)$ 类算子, 则 T 正规.

证 令 $\delta_1 = \frac{p_1 + r_1}{q_1} - r_1, \delta_2 = \frac{p_2 + r_2}{q_2} - r_2$, 则 $-r_i < \delta_i \leq p_i$,

$$(|T^*|^{r_1} |T|^{2p_1} |T^*|^{r_1})^{\frac{r_1+\delta_1}{p_1+r_1}} \geq |T^*|^{2(r_1+\delta_1)},$$

$$|T|^{2(p_1-\delta_1)} \geq (|T|^{p_1} |T^*|^{2r_1} |T|^{p_1})^{\frac{p_1-\delta_1}{p_1+r_1}},$$

以及

$$(|T|^{r_2} |T^*|^{2p_2} |T|^{r_2})^{\frac{r_2+\delta_2}{p_2+r_2}} \geq |T|^{2(r_2+\delta_2)},$$

$$|T^*|^{2(p_2-\delta_2)} \geq (|T^*|^{p_2} |T|^{2r_2} |T^*|^{p_2})^{\frac{p_2-\delta_2}{p_2+r_2}}.$$

由引理 5.2.9 (3) \Rightarrow (1) 知 $|T|^2 = |T^*|^2$, 故 T 正规.

另一方面, $wF(p, r, q)$ 算子与其 Aluthge 变换的 p -亚正常算子类之间有下列关系:

定理 5.2.7 设 $p, r > 0, q \geq 1$. 如果 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 则 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 $\min \left\{ \frac{1}{q}, \max \left\{ \frac{p}{p+r}, 1 - \frac{1}{q} \right\} \right\}$ -亚正常的. 特别地, 当 $1 \leq q \leq \frac{p+r}{r}$ 时, $\tilde{T}_{p,r}$ 是 $\min \left\{ \frac{p}{p+r}, \frac{1}{q} \right\}$ -亚正常的.

证 首先设 $1 \leq q \leq \frac{p+r}{r}$, 则 $0 \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{p}{p+r}$, 令 $\delta = \frac{p+r}{q} - r$, 则 $0 \leq \delta \leq p$, 故 $T \in wF(p, r, q)$, 可以推出

$$T \in F(p, r, q) = F\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right) \subseteq F\left(p, r, \frac{p+r}{r}\right).$$

从而

$$(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{r}{p+r}} \geq |T^*|^{2r}.$$

由引理 5.2.4 得 $|T|^{2p} \geq (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{\frac{p}{p+r}}$, 即

$$|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{\frac{2p}{p+r}} \leq |T|^{2p}.$$

又由定理 5.2.1 知

$$|T|^{\frac{2p+2r}{q}} \leq |\tilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}}.$$

令 $m = \min \left\{ \frac{p}{p+r}, \frac{1}{q} \right\}$, 则

$$|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2m} \leq |T|^{2m(p+r)} \leq |\tilde{T}_{p,r}|^{2m}.$$

故 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 m -亚正常的.

设 $1 \leq \frac{p+r}{r} \leq q$, 则 $1 - \frac{1}{q} \geq \frac{p}{p+r}$, $\max \left\{ \frac{p}{p+r}, 1 - \frac{1}{q} \right\} = 1 - \frac{1}{q}$,

令 $m' = \min \left\{ 1 - \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right\}$, 则由定理 5.2.1 知

$$|\tilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}} \geq |T|^{\frac{2p+2r}{q}}, \quad |T|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq |(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2(1-\frac{1}{q})}.$$

则

$$|\tilde{T}_{p,r}|^{2m'} \geq |T|^{2m'(p+r)} \geq |(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2m'}.$$

故 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 m' -亚正常的.

定理 5.2.8 设 $p, r > 0$, $q \geq 1$, $s \geq p$, $t \geq r$. 如果 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, $\tilde{T}_{s,t}$ 正常, 则 T 正常.

证 首先由假设, 令 $\delta = \frac{p+r}{q} - r$, 则 $T \in wF(p, r, \frac{p+r}{\delta+r})$, 由 $s \geq p$, $t \geq r$, 应用定理 5.2.4 知 $T \in wF(s, t, \frac{s+t}{\delta+t})$, 从而由定理 5.2.7 得

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_{s,t}|^{\frac{2 \min\{t+\delta, \max\{s-\delta, s\}\}}{t+s}} &\geq |T|^{2 \min\{t+\delta, \max\{s-\delta, s\}\}} \\ &\geq |(\tilde{T}_{s,t})^*|^{\frac{2 \min\{t+\delta, \max\{s-\delta, s\}\}}{t+s}}. \end{aligned}$$

另一方面, 由 $\tilde{T}_{s,t}$ 正规, 即 $|\tilde{T}_{s,t}|^2 = |(\tilde{T}_{s,t})^*|^2$, 故

$$|T^*|^t |T|^{2s} |T^*|^t = |T^*|^{2(s+t)},$$

且

$$|T|^{2(s+t)} = |T|^s |T^*|^{2t} |T|^s.$$

故由引理 5.2.9 知 T 是正规的.

利用上述结果下列推论是显然的.

推论 5.2.6 设 $p_i, r_i > 0$, $q_i \geq 1$, $q_i \leq \frac{p_i + r_i}{r_i}$, $i = 1, 2$. 如果 T 是 $F(p_1, r_1, q_1)$ 类算子, T^* 是 $F(p_2, r_2, q_2)$ 类算子, 则 T 正规.

推论 5.2.7 设 $p, r > 0$, $1 \leq q \leq \frac{p+r}{r}$. 如果 T 是 $F(p, r, q)$ 类算子, 则

$\tilde{T}_{p,r}$ 是 $\min \left\{ \frac{p}{p+r}, \frac{1}{q} \right\}$ -亚正常的.

推论 5.2.8 设 $p, r > 0$, $1 \leq q \leq \frac{p+r}{r}$, $s \geq p$, $t \geq r$. 如果 T 是 $F(p, r, q)$ 类算子, 且 $\tilde{T}_{s,t}$ 是正常的, 则 T 正常.

推论 5.2.9 如果 T 是对数 - 亚正常的, 则 $\tilde{T}_{s,t}$ 是 $\min \left\{ \frac{t}{s+t}, \frac{s}{s+t} \right\}$ - 亚正常的.

证明推论 5.2.9 要用到如下结果:

定理 5.2.I [94],[95] 若对某个 $R > 0$, T 是 R -亚正常的, 或 T 是对数 - 亚正常的, 则对任意 $p > 0$, $r > 0$, 有 $T \in A(p, r)$ (或 $WA(p, r)$).

5.3 $F(p, r, q), wF(p, r, q)$ 算子类与其中参数的依赖性

下面说明 $F(p, r, q), wF(p, r, q)$ 算子类与其中参数的依赖性. 首先回忆一些已有的结论.

定理 5.3.A [65] 设 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$, $q_0 \geq 1$, T 为一个 $F(p_0, r_0, q_0)$ 类算子. 则下列结论成立:

- (1) 若 $r \geq r_0$, 则 T 为一个 $F(p_0, r, q_0)$ 类算子;
- (2) 若 $q \geq q_0$, 则 T 为一个 $F(p_0, r_0, q)$ 类算子.

定理 5.3.A (1) 可由引理 5.1.3 和 L-H 不等式得证.

定理 5.3.B 设 $p \geq p_0 > 0$, $r \geq r_0 \geq 0$ 及 $-r_0 < \delta_0 \leq p_0$. 若 T 为一个 $F(p_0, r_0, \frac{p_0+r_0}{\delta_0+r_0})$ 类算子, 则下列结论成立:

- (1) T 为一个 $F(p_0, r, \frac{p_0+r}{\delta_0+r})$ 类算子;
- (2) 当 $0 \leq \delta_0 \leq p_0$ 时, T 为一个 $F(p, r, \frac{p+r}{\delta_0+r})$ 类算子.

定理 5.3.B 为定理 5.2.A、推论 5.2.3 的直接结果.

由于 $q_0 \geq \frac{p_0+r}{\delta_0+r}$ ($r \geq r_0$ 时), 故由定理 5.3.B (1)、定理 5.3.A (2)

及 Löwner-Heinz 不等式可推出定理 5.3.A (1), 即定理 5.3.B (1) 是定理 5.3.A (1) 的推广.

同时, 也有 $\frac{p+r_0}{\delta_0+r_0} \geq q_0$ ($p \geq p_0$ 时). 我们试图类似定理 5.3.A (1) 推广到定理 5.3.B (1) 来推广 $r = r_0$ 时的定理 5.3.B (2) 是否有关于 p 的单调性. 这里给出下列与定理 5.3.B (2) 相关的结论.

定理 5.3.1 设 $p_0 > 0, r_0 > 0, q_0 > 1$. 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0 - r_0, \quad p > (1+r_0)q_0 - r_0,$$

则存在一个 $F(p_0, r_0, q_0)$ 类算子 T , 但 T 不是一个 $F(p, r_0, q_0)$ 类算子.

推论 5.3.1 设 $p_0 > 0, r_0 > 0, q_0 > 1$ 且 $r_0 q_0 \leq p_0 + r_0$. 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0 - r_0, \quad p > (1+r_0)q_0 - r_0,$$

则存在一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子 T , 但 T 不是一个 $wF(p, r_0, q_0)$ 类算子.

定理 5.3.1 表明当 $r = r_0$ 时定理 5.3.B (2) 不能被推广为:

设 $p \geq p_0 > 0, r_0 \geq 0, q_0 \geq 1$ 且 $r_0 q_0 \leq p_0 + r_0$ (等价于 $0 \leq \delta_0 \leq p_0$). 若 T 为一个 $F(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 则 T 为一个 $F(p, r_0, q_0)$ 类算子.

我们准备下面的结论以给出证明.

定理 5.3.C [81],[50],[96] 设 $\delta > 0, p > 0, r > 0$ 且 $q > 0$. 若 $0 < q < 1$ 或 $(\delta+r)q < p+r$, 则下列结论成立:

(1) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B 满足

$$A^\delta \geq B^\delta \text{ 且 } \left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \not\geq B^{\frac{p+r}{q}};$$

(2) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B 满足

$$A^\delta \geq B^\delta \text{ 且 } A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 5.3.D 设 $p > 0, r \geq 0$ 且 $q \geq 1$, 则下列结论成立:

(1) 下述 (i)~(iii) 等价:

(i) 算子 T 满足 $(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}};$

(ii) 算子 T 满足 $|\tilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}} \geq |T|^{\frac{2(p+r)}{q}};$

(iii) 算子 T 满足 $|(\tilde{T}_{r,p}^*)^*|^{\frac{2}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}$.

(2) 下述 (i)~(iii) 等价:

(i) 算子 T 满足 $|T|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{1-\frac{1}{q}}$;

(ii) 算子 T 满足 $|T|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq |(\tilde{T}_{p,r}^*)^*|^{2(1-\frac{1}{q})}$;

(iii) 算子 T 满足 $|T^*|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq |(\tilde{T}_{r,p}^*)^*|^{2(1-\frac{1}{q})}$.

定理 5.3.D 由引理 1.3.4 中可得.

引理 5.3.1 设 $p_0 > 0$, $r_0 > 0$ 且 $q_0 > 1$. 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0 - r_0, \quad p > (1+r_0)q_0 - r_0,$$

则下列结论成立:

(1) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^{p_0} B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \geq B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}} \quad \text{及} \quad \left(B^{\frac{r_0}{2}} A^p B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \not\geq B^{\frac{p+r_0}{q_0}}.$$

(2) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B 满足

$$A^{\frac{p_0+r_0}{q_0}} \geq \left(A^{\frac{r_0}{2}} B^{p_0} A^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \quad \text{及} \quad A^{\frac{p+r_0}{q_0}} \not\geq \left(A^{\frac{r_0}{2}} B^p A^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}}.$$

引理 5.3.1 可由定理 5.3.C (取 $\delta = 1$) 与定理 F 直接得出.

引理 5.3.2 设 A 与 B 为 H 上的正算子, 于 $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_k$ (其中 $H_k \cong H$)

上定义 T 如下:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & B^{\frac{1}{2}} & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & B^{\frac{1}{2}} & & & \\ & & & & (0) & & \\ & & & & A^{\frac{1}{2}} & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & A^{\frac{1}{2}} & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.3.1)$$

其中 () 指矩阵元素 (0,0) 的位置. 则下列结论对每个 $p > 0$, $r > 0$ 及 $\beta > 0$ 成立:

(1) $(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^\beta \geq |T^*|^{2(p+r)\beta}$ 当且仅当

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}}\right)^\beta \geq B^{(p+r)\beta};$$

(2) $|T|^{2(p+r)\beta} \geq (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^\beta$ 当且仅当

$$A^{(p+r)\beta} \geq \left(A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}}\right)^\beta.$$

证 简单计算易得

$$|T|^2 = T^* T = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & (A) & & \\ & & & & A & \\ & & & & & A \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$|T^*|^2 = T T^* = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & (B) & & \\ & & & & A & \\ & & & & & A \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

因此有

$$|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B^{p+r} & & & & \\ & & B^{p+r} & & & \\ & & & (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}}) & & \\ & & & & A^{p+r} & \\ & & & & & A^{p+r} \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & B^{p+r} & & \\ & & & B^{p+r} & \\ & & & & (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}}) \\ & & & & & A^{p+r} \\ & & & & & & A^{p+r} \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

故比较两个矩阵 $(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^\beta$ 及 $|T^*|^{2(p+r)\beta}$ 相应的 $(0,0)$ 元素得证 (1). 类似地, 比较两个矩阵 $|T|^{2(p+r)\beta}$ 及 $(|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^\beta$ 相应的 $(0,0)$ 元素得证 (2).

定理 5.3.1 的证明 由引理 5.3.1 (1), 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^{p_0} B^{\frac{r_0}{2}} \right)^{\frac{1}{q_0}} \geq B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}} \quad (5.3.2)$$

及

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^p B^{\frac{r_0}{2}} \right)^{\frac{1}{q_0}} \not\geq B^{\frac{p+r_0}{q_0}}. \quad (5.3.3)$$

于 $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_k$ (其中 $H_k \cong H$) 上定义 T 如 (5.3.1). 则由 (5.3.2)、引理 5.3.2

(1) 得, T 为一个 $F(p_0, r_0, q_0)$ 类算子. 同时, 由 (5.3.3)、引理 5.3.2 (1) 得, T 不是一个 $F(p, r_0, q_0)$ 类算子.

推论 5.3.1 为定理 5.3.1 与定理 5.2.3 的直接结果.

下面将对 $wF(p, r, q)$ 类中的算子做类似上面的讨论, 这些讨论是与 5.2 节相联系的, 故先回忆相应的结论.

定理 5.3.E 设 $p_0 > 0, r \geq r_0 \geq 0, q \geq q_0 \geq 1$ 且 $r_0 q_0 \leq p_0 + r_0$. 若 T 为一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 则下列结论成立:

- (1) 当 $r q_0 \leq p_0 + r$ 时, T 为一个 $wF(p_0, r, q_0)$ 算子.
- (2) 当 $r_0 q \leq p_0 + r_0$ 时, T 为一个 $wF(p_0, r_0, q)$ 类算子.

定理 5.3.E 为定理 5.3.A 与定理 5.2.3 的直接结果.

定理 5.3.F 设 $p \geq p_0 > 0, r \geq r_0 \geq 0, 0 < \delta_0 \leq p_0$. 若 T 为一个

$F(p_0, r_0, \frac{p_0 + r_0}{\delta_0 + r_0})$ 类算子, 则 T 属于 $F(p, r, \frac{p+r}{\delta_0 + r})$ 类.

定理 5.3.F 即为推论 5.2.3.

当 $q_0 \geq 1$, $r_0 q_0 \leq p_0 + r_0$ (等价于 $0 \leq \delta \leq p_0$) 及 $r q_0 \leq p_0 + r_0$ 时, 由 $q_0 \geq \frac{p_0 + r}{\delta + r}$ 得, 定理 5.3.F 的 $p = p_0$ 情形可推出定理 5.3.E (1), 即定理 5.3.F 的 $p = p_0$ 情形为定理 5.3.E (1) 的推广. 这里给出下列与定理 5.3.F 相关的结论.

定理 5.3.2 设 $p_0 > 0$, $r_0 > 0$, $q_0 > 1$. 若

$$p_0 \leq (1 + r_0)q_0 - r_0, \quad r_0 \leq (1 + p_0)q_0^* - p_0,$$

其中 q_0^* 是 q_0 的共轭数, 则下列结论成立:

(1) 当 $p > (1 + r_0)q_0 - r_0$ 时, 存在一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子 T , 但 T 不是一个 $wF(p, r_0, q_0)$ 类算子;

(2) 当 $r > (1 + p_0)q_0^* - p_0$ 时, 存在一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子 T , 但 T 不是一个 $wF(p_0, r, q_0)$ 类算子.

定理 5.3.2 (1) 表明当 $r = r_0$ 时定理 5.3.F 不能类似定理 5.3.E (1) 推广到定理 5.3.F 的 $p = p_0$ 情形被推广为:

设 $p \geq p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$ 且 $q_0 \geq 1$. 若 T 为一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 则 T 为一个 $wF(p, r_0, q_0)$ 类算子.

类似地, 定理 5.3.2 (2) 表明当 $p = p_0$ 时定理 5.3.F 不能被推广为:

设 $p_0 > 0$, $r \geq r_0 \geq 0$ 且 $q_0 \geq 1$. 若 T 为一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 则 T 为一个 $wF(p_0, r, q_0)$ 类算子.

定理 5.3.E (1) 与定理 5.3.2 (2) 同时成立, 这是很有趣的, 下面说明这并不矛盾.

事实上, 当 $q_0 > 1$ 时, 定理 5.3.E (1) 中条件 $r \geq r_0$ 且 $r q_0 \leq p_0 + r$ 等价于 $\frac{p_0}{q_0 - 1} \geq r \geq r_0$. 同时, 定理 5.3.2 (2) 中条件 $p_0 \leq (1 + r_0)q_0 - r_0$, $r_0 \leq (1 + p_0)q_0^* - p_0$ 及 $r > (1 + p_0)q_0^* - p_0$ 分别等价于 $r_0 \geq \frac{p_0}{q_0 - 1} - \frac{q_0}{q_0 - 1}$, $r_0 \leq \frac{p_0}{q_0 - 1} + \frac{q_0}{q_0 - 1}$ 及 $r > \frac{p_0}{q_0 - 1} + \frac{q_0}{q_0 - 1}$.

我们准备下面的结论以给出证明.

引理 5.3.3 设 $p_0 > 0$, $r_0 > 0$ 且 $q_0 > 1$, 则下列结论成立:

(1) 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0 - r_0, \quad r_0 \leq (1+p_0)q_0^* - p_0,$$

$$p > (1+r_0)q_0 - r_0,$$

则存在 \mathbf{R}^2 上的正算子 A 与 B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^{p_0} B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \geq B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}}, \quad A^{\frac{p_0+r_0}{q_0^*}} \geq \left(A^{\frac{p_0}{2}} B^{r_0} A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}},$$

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^p B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \not\geq B^{\frac{p+r_0}{q_0}};$$

(2) 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0 - r_0, \quad r_0 \leq (1+p_0)q_0^* - p_0,$$

$$r > (1+p_0)q_0^* - p_0,$$

则存在 \mathbf{R}^2 上的正算子 A 与 B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^{p_0} B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \geq B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}}, \quad A^{\frac{p_0+r_0}{q_0^*}} \geq \left(A^{\frac{p_0}{2}} B^{r_0} A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}},$$

$$A^{\frac{p_0+r}{q_0^*}} \not\geq \left(A^{\frac{p_0}{2}} B^r A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}}.$$

引理 5.3.3 为定理 5.3.C 与定理 5.3.F 的直接结果.

定理 5.3.2 (1) 的证明 由引理 5.3.3 (1), 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^{p_0} B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \geq B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}}, \quad A^{\frac{p_0+r_0}{q_0^*}} \geq \left(A^{\frac{p_0}{2}} B^{r_0} A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}} \quad (5.3.4)$$

及

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}} A^p B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \not\geq B^{\frac{p+r_0}{q_0}}. \quad (5.3.5)$$

于 $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_k$ (其中 $H_k \cong \mathbf{R}^2$) 上定义 T 如 (5.3.1). 则由 (5.3.4)、引理

5.3.2 得 T 为一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 同时, 由 (5.3.5)、引理 5.3.2 (1) 及定理 5.3.D (1) 得 T 不是一个 $wF(p, r_0, q_0)$ 类算子.

定理 5.3.2 (2) 的证明与定理 5.3.2 (1) 的证明类似, 故省略.

5.4 $A(s, t)$ 类算子的谱性质

设 T 复 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, $T = U|T|$ 是 T 的极分解, $T(s, t) = |T|^s U |T|^t$ 是 T 的广义 Althuge 变换, 其中 $0 < s, t \leq 1$. 回忆 T 称为是 $A(s, t)$ 类算子, 如果

$$|T(s, t)|^{\frac{2t}{s+t}} \geq |T|^{2t}.$$

特别地, $A(1, 1)$ 类算子即为 A 类算子, 也就是满足条件 $|T^2| \geq |T|^2$ 的算子.

为研究算子的谱性质, 常常用到下列结果:

引理 5.4.1 设 $T = U|T|$ 是 T 的极分解, $\lambda = |\lambda|e^{i\theta} \neq 0$, $\{x_n\}$ 是一向量列, 则下列条件等价:

- (1) $(T - \lambda)x_n \rightarrow 0$ 且 $(T^* - \bar{\lambda})x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$);
- (2) $(|T| - |\lambda|)x_n \rightarrow 0$ 且 $(U - e^{i\theta})x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$);
- (3) $(|T^*| - |\lambda|)x_n \rightarrow 0$ 且 $(U^* - e^{-i\theta})x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

证 (1) \Rightarrow (2), (3) 由于 $\|Tx\| = \||T|x\|$, 故有 $Tx_n \rightarrow 0$ 当且仅当 $|T|x_n \rightarrow 0$; $T^*x_n \rightarrow 0$ 当且仅当 $|T^*|x_n \rightarrow 0$, 故当 $\lambda = 0$ 时, (1) 蕴含 (2), (3) 的前一个式子.

如果 $\lambda \neq 0$, 则 $|T| + |\lambda|$ 及 $|T^*| + |\lambda|$ 都可逆, 且由

$$(|T| + |\lambda|)(|T| - |\lambda|) = T^*(T - \lambda) + \lambda(T^* - \bar{\lambda}), \quad (5.4.1)$$

$$(|T^*| + |\lambda|)(|T^*| - |\lambda|) = T(T^* - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}(T - \lambda), \quad (5.4.2)$$

$$|\lambda|(U - e^{i\theta}) = T - \lambda - U(|T| - |\lambda|), \quad (5.4.3)$$

$$|\lambda|(U^* - e^{-i\theta}) = T^* - \bar{\lambda} - U^*(|T^*| - |\lambda|), \quad (5.4.4)$$

可知 (2), (3) 成立.

反之, 由 (2), (3) 成立, 应用上面 4 个式子也可以看出 (1) 成立.

引理 5.4.2 设 $T \geq 0$, $\alpha > 0$, 则

- (1) $Tx = 0 \Leftrightarrow (Tx, x) = 0$;

(2) $\|Tx_n\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow (Tx_n, x_n) \rightarrow 0$, 其中 $n \rightarrow \infty$ 且 $\{x_n\}$ 是 H 中一有界向量列;

(3) $Tx_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow T^\alpha x_n \rightarrow 0$, 其中 $n \rightarrow \infty$ 且 $\{x_n\}$ 是 H 中一有界向量列.

引理 5.4.3 设 T 是 A 类算子, 且 $0 \neq \lambda = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $\{x_n\}$ 是单位向量列.

(1) 若 $(T - \lambda)x_n \rightarrow 0$, 则 $(T - \lambda)^*x_n \rightarrow 0$, $(|T| - |\lambda|)x_n \rightarrow 0$, $(U - e^{i\theta})x_n \rightarrow 0$, $(U - e^{i\theta})^*x_n \rightarrow 0$, 故 $\sigma_a(T) - \{0\} \subseteq \sigma_{ja}(T)$, 即近似非零点谱包含在联合近似点谱中.

(2) 若 $\lambda \neq 0$ 是 T 的一个特征值, 则 $N(T - \lambda) \subseteq N((T - \lambda)^*)$, 即 $N(T - \lambda)$ 约化 T .

证 由于 A 类算子满足 $|T|^2 \leq |T^2|$, 故

$$\begin{aligned}\|Tx_n\|^2 &= (|T|^2 x_n, x_n) \leq (|T^2| x_n, x_n) \\ &\leq \| |T^2| x_n \| = \| T^2 x_n \|,\end{aligned}$$

以及 $\|Tx_n\|^2 \rightarrow r^2$, $\|T^2 x_n\| \rightarrow r^2$, 知 $(|T^2| x_n, x_n) \rightarrow r^2$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\|(|T^2| - r^2)x_n\|^2 = \| |T^2| x_n \|^2 - 2r^2(|T^2| x_n, x_n) + r^4 \rightarrow 0.$$

又由 $|T^2| - T^*T \geq 0$ 及

$$((|T^2| - T^*T)x_n, x_n) \leq \|T^2 x_n\| - \|Tx_n\|^2 \rightarrow 0,$$

应用引理 5.4.2 得 $(|T^2| - T^*T)x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 于是

$$\begin{aligned}\|(\lambda T^* - r^2)x_n\| &\leq \|(|T^2| - r^2)x_n\| + \|(|T^2| - T^*T)x_n\| \\ &\quad + \|T^*(T - \lambda)x_n\| \\ &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

故 $(T^* - \lambda^*)x_n \rightarrow 0$, 再由引理 5.4.1 得证.

定义 1 设一个有界线性算子 $T: H \rightarrow H'$ 满足: 存在有界线性算子 $B: H' \rightarrow H$ 及紧算子 $K: H$ (或 H') $\rightarrow H$ (或 H') 使 $BT = I + K$ (或 $TB = I + K$), 称 T 为左 (右) 半 Fredholm 算子, 简称 T 为半 Fredholm 算子.

可证 T 为左半 Fredholm 算子 $\Leftrightarrow T$ 的值域闭且 $\dim N(T) < \infty$.

对半 Fredholm 算子 T , 可定义其 Fredholm 指标

$$\text{ind } T = \dim N(T) - \dim (R(T))^\perp = \dim N(T) - \dim N(T^*).$$

定理 5.4.A ^[18] Fredholm 指标是 $\{\text{半 Fredholm 算子}\} \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ 上的连续映射.

由定理 5.4.A, 易见有下列引理:

引理 5.4.4 设 $T(s): [0, 1] \rightarrow B(H)$ 是范数连续映射, 即 $s_n, s \in [0, 1], s_n \rightarrow s$ 蕴含 $\|T(s_n) - T(s)\| \rightarrow 0$, 及 $T(0), T(1)$ 是半 Fredholm 算子且使 $\text{ind } T(0) \neq \text{ind } T(1)$, 则存在 $s_0 \in (0, 1)$, 使 $T(s_0)$ 不是半 Fredholm 算子, 从而 $0 \in \sigma_a(T(s_0))$.

事实上, 若 $0 \notin \sigma_a(T(s_0))$, 存在 $c > 0$, 使 $\|T(s_0)x\| \geq c\|x\|$, 从而 $T(s_0)$ 的值域闭且 $N(T(s_0)) = \{0\}$, 故为半 Fredholm 算子.

引理 5.4.5 设 $T = U|T|$ 是 $A(s, t)$ 算子, $s, t > 0$, 则 $T(s, t) = |T|^s U |T|^t$ 是 $\frac{\min\{s, t\}}{s+t}$ -亚正常算子.

证 由 $|T(s, t)|^{\frac{2t}{s+t}} \geq |T|^{2t}$, 可得

$$(|T^*|^t |T|^{2s} |T^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t}.$$

故由引理 5.4.2 知

$$|T|^{2s} \geq (|T|^s |T^*|^{2t} |T|^s)^{\frac{s}{s+t}} = |T(s, t)^*|^{\frac{2s}{s+t}},$$

再由 Löwner-Heinz 不等式知结论成立.

定理 5.4.1 设 $T = U|T|$ 是 $A(s, t)$ 类算子, 且 $0 < s, t \leq 1$, 当 $s+t \geq 1$ 时, 取 $\alpha \geq 0$, 当 $0 < s+t < 1$ 时, 取 α 使 $0 \leq \alpha \leq \frac{1 - \max\{s, t\}}{1 - s - t}$, 令

$S(\alpha) = U|T|^{1+\alpha(s+t-1)}$, 则 $S(\alpha)$ 是 $A\left(\frac{s}{1+\alpha(s+t-1)}, \frac{t}{1+\alpha(s+t-1)}\right)$ 类算子, 且

$$\sigma_a(S(\alpha)) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta} : r e^{i\theta} \in \sigma_a(T)\}, \quad (5.4.5)$$

$$\sigma(S(\alpha) \setminus \sigma_a(S(\alpha))) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta} : r e^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)\}. \quad (5.4.6)$$

故

$$\sigma(S(\alpha)) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta} : r e^{i\theta} \in \sigma(T)\}.$$

特别地, $\sigma(U|T|^{s+t}) = \{r^{s+t} e^{i\theta} : r e^{i\theta} \in \sigma(T)\}.$

证 显见 $S(\alpha)$ 是 $A\left(\frac{s}{1+\alpha(s+t-1)}, \frac{t}{1+\alpha(s+t-1)}\right)$ 类算子,

又

$$0 < \frac{s}{1+\alpha(s+t-1)} \leq 1, \quad 0 < \frac{t}{1+\alpha(s+t-1)} \leq 1.$$

由推论 5.2.2 知, T 是 A 类算子. 先证 (5.4.5). 若 $0 \in \sigma_a(T)$, 则存在单位向量 x_n 使 $Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 由引理 5.4.1 知, $|T|x_n \rightarrow 0$, 从而 $S(\alpha)x_n \rightarrow 0$, 于是 $0 \in \sigma_a(S(\alpha))$. 现令 $0 \neq \lambda = r e^{i\theta} \in \sigma_a(T)$, 则由引理 5.4.3, 存在单位向量 x_n 使

$$(|T| - r)x_n \rightarrow 0, \quad (U - e^{i\theta})x_n \rightarrow 0.$$

故

$$\begin{aligned} & \| (S(\alpha) - r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta}) x_n \| \\ &= \| (U|T|^{1+\alpha(s+t-1)} - r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta}) x_n \| \\ &\leq \| U(|T|^{1+\alpha(s+t-1)} - r^{1+\alpha(s+t-1)}) x_n \| \\ &\quad + \| r^{1+\alpha(s+t-1)} (U - e^{i\theta}) x_n \| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

这里用到当 $A \geq 0$ 时, $\beta > 0$, $r > 0$, 如果 $\|x_n\| = 1$ 使 $(A - r)x_n \rightarrow 0$, 则 $(A^\beta - r^\beta)x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 因为 $\forall \varepsilon > 0$, 存在多项式 $g(t)$ 使

$$|t^\beta - g(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in \sigma(A),$$

于是 $\|A^\beta - g(A)\| \leq \varepsilon$. 故

$$\|(A^\beta - r^\beta)x_n\| \leq \|A^\beta - g(A)\| + \|(g(A) - g(r))x_n\| + |g(r) - r^\beta|.$$

因此 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|(A^\beta - r^\beta)x_n\| \leq 2\varepsilon$, 故结论成立.

反之, 如果 $0 \in \sigma_a(S(\alpha))$, 则存在单位向量 x_n 使 $S(\alpha)(x_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 于是

$$|T|^{1+\alpha(s+t-1)}x_n = U^*U|T|^{1+\alpha(s+t-1)}x_n \rightarrow 0,$$

从而由引理 5.4.2 得 $|T|x_n \rightarrow 0$, 即 $0 \in \sigma_a(T)$.

如果 $0 \neq \mu e^{i\theta} \in \sigma_a(S(\alpha))$, 则存在单位向量 x_n 使 $(S(\alpha) - \mu e^{i\theta})x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 由 $S(\alpha)$ 也是 A 类算子及引理 5.4.3 得

$$(|S(\alpha)| - \mu)(x_n) = (|T|^{1+\alpha(s+t-1)} - \mu)x_n \rightarrow 0$$

及 $(U - e^{i\theta})x_n \rightarrow 0$. 于是根据

$$\begin{aligned} & \left(T - \mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}} e^{i\theta}\right)x_n \\ &= U\left(|T| - \mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}\right)x_n + \mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}(U - e^{i\theta})x_n, \end{aligned}$$

得 $\mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}} e^{i\theta} \in \sigma_a(T)$. 于是 (5.4.5) 得证.

下证 (5.4.6). 设 $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, 则 $R(T)$ 闭且 $R(T) \neq H$ 及 $N(T) = \{0\}$. 由 [18] 知 $S(\alpha)$ 的值域也闭, 且

$$N(S(\alpha)) = N(|T|) = \{0\},$$

故 $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ 蕴含 $0 \notin \sigma_a(S(\alpha))$. 又 $0 \in \rho(T) \Leftrightarrow 0 \in \rho(S(\alpha))$, 故 $0 \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$. 现设 $0 \neq \lambda = r e^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, 由 (5.4.5) 得 $r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta} \notin \sigma_a(S(\alpha))$.

下证 $r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta} \in \sigma(S(\alpha))$. 事实上, 若 $r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta} \notin \sigma(S(\alpha))$, 则 $S'(\alpha'): [0, \alpha] \mapsto B(H)$,

$$S'(\alpha') = U|T|^{1+\alpha'(s+t-1)} - r^{1+\alpha'(s+t-1)} e^{i\theta}$$

是范数连续的, 且 $S'(0) = T - \lambda$ 是半 Fredholm 及 $\text{ind } S'(0) \leq -1$; 而 $S'(\alpha) = S(\alpha) - r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta}$ 可逆, 故由引理 5.4.4 知, 存在 $\alpha_1 \in (0, \alpha)$,

使 $r^{1+\alpha_1(s+t-1)} e^{i\theta} \in \sigma_a(S(\alpha_1))$, 仿照 (5.4.5) 式后半部分的证明可得 $r e^{i\theta} \in \sigma_a(T)$, 矛盾. 故 $r^{1+\alpha(s+t-1)} e^{i\theta} \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$.

反之, 若 $0 \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$, 则类似上面可证 $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, 及 $0 \neq \mu e^{i\theta} \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$,

令 $S''(\alpha'') : [0, \alpha] \rightarrow \mathcal{B}(H)$,

$$\alpha'' \mapsto U|T|^{1+\alpha''(s+t-1)} - \mu^{\frac{1+\alpha''(s+t-1)}{1+\alpha(s+t-1)}} e^{i\theta},$$

类似可证 $\mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}} e^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$.

5.5 $wF(p, r, q)$ 类算子的谱性质

首先, 我们回忆如果 H 上的有界线性算子 T 的谱可表示成 $\sigma(T) = F_1 \cup F_2$, 其中 F_1, F_2 是两个非空不交闭集, 则可取在 F_2 外部, 并使得 F_1 位于其内部的围线 Γ . 令

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T)^{-1} dz,$$

则可验证 A 是一个非平凡的幂等算子, 且 $AT = TA$, $\sigma(AT) = F_1 \cup \{0\}$. 事实上, 当 $u \in F_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} AT - u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [T(z - T)^{-1} - u(z - u)^{-1}] dz \\ &= (T - u) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z(z - T)^{-1}(z - u)^{-1} dz. \end{aligned}$$

同理, 当 $u \in F_2$ 时, 有

$$\begin{aligned} AT &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [T(z - T)^{-1} - u(z - u)^{-1}] dz \\ &= (T - u) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z(z - T)^{-1}(z - u)^{-1} dz. \end{aligned}$$

于是 $F_1 \cup \{0\} \subseteq \sigma(AT)$.

另一方面, 当 ξ 不在 $F_1 \cup \{0\}$ 中时, 由

$$(T - \xi) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - \xi)^{-1} (z - T)^{-1} dz = A,$$

$$A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - \xi)^{-1} (z - T)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - \xi)^{-1} (z - T)^{-1} dz,$$

可知

$$\begin{aligned} & (AT - \xi) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - \xi)^{-1} (z - T)^{-1} dz + \xi^{-1} (A - I) \right] \\ &= [A(T - \xi) + (A - I)\xi] \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - \xi)^{-1} (z - T)^{-1} dz \right. \\ &\quad \left. + \xi^{-1} (A - I) \right] \\ &= (A - I)^2 + A = I. \end{aligned}$$

从而 $\sigma(AT) \subseteq F_1 \cup \{0\}$; 类似地, 有 $\sigma((I - A)T) = F_2 \cup \{0\}$. 因此当 $\sigma(T)$ 不连通时, T 有非平凡的不变子空间.

其次, 我们知道, 如果 T 是半亚正常算子, 则 $\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T)$. 该结果对 p -亚正常算子及可逆的对数亚正规算子也成立; 可参见 [89], [63], [76], 对 w -亚正常算子^[4], 有 $\sigma_{jp}(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\}$. 该结果对 p - w -亚正常算子也成立, 见 [106]. 本节指出此结果对 $wF(p, r, q)$ 类算子也有类似的结果, 为此先给出几个引理.

引理 5.5.1 设 $T = U|T|$ 是 $wF(p, r, q)$ 类算子 T 的极分解, $p + r = 1$, 且 $q \geq 1$. 如果 $\tilde{T}_{p,r}$ 具有性质: $(\tilde{T}_{p,r})x = \lambda x$, $\lambda \neq 0$ 可蕴含 $(\tilde{T}_{p,r})^*x = \bar{\lambda}x$, 则 T 亦具有该性质.

证 设 $\lambda = |\lambda|e^{i\theta} \neq 0$, 且 $Tx = \lambda x$, 故

$$(\tilde{T}_{p,r})(|T|^p x) = |T|^p U|T|x = \lambda |T|^p x.$$

由假设可知 $(\tilde{T}_{p,r})^*(|T|^p x) = \bar{\lambda} |T|^p x$. 结果对每个 $\alpha > 0$, 有

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_{p,r}|^\alpha (|T|^p x) &= ((\tilde{T}_{p,r})^* \tilde{T}_{p,r})^{\frac{\alpha}{2}} (|T|^p x) \\ &= |\lambda|^\alpha (|T|^p x) = (\tilde{T}_{p,r} \tilde{T}_{p,r}^*)^{\frac{\alpha}{2}} (|T|^p x) \\ &= |(\tilde{T}_{p,r})^*|^\alpha (|T|^p x). \end{aligned}$$

因为 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 故由定理 5.2.7 知, 存在 $\alpha_0 > 0$, 使 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 α_0 -亚正常算子, 于是

$$\begin{aligned} |\lambda|^{\alpha_0} (|T|^p x, |T|^p x) &= (|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0} (|T|^p x), |T|^p x) \\ &\geq (|T|^{\alpha_0} (|T|^p x), |T|^p x) \\ &\geq (|\tilde{T}_{p,r}^*|^{\alpha_0} (|T|^p x), |T|^p x) \\ &= |\lambda|^{\alpha_0} (|T|^p x, |T|^p x). \end{aligned}$$

故 $((|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0} - |T|^{\alpha_0})|T|^p x, |T|^p x) = 0$.

再由 $|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0} \geq |T|^{\alpha_0}$ 知 $(|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0} - |T|^{\alpha_0})|T|^p x = 0$. 从而

$$|T|^{\alpha_0} (|T|^p x) = |\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0} (|T|^p x) = |\lambda|^{\alpha_0} (|T|^p x),$$

进而 $|T|(|T|^p x) = |\lambda|(|T|^p x)$, 或有

$$(|T|x - |\lambda|x) \in N(|T|^p) = N(|T|) = N(U),$$

即有 $U|T|x = U|\lambda|x$, 即 $Ux = e^{i\theta}x$.

另外, 由于

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|U^*x - e^{-i\theta}x\|^2 \\ &= \|U^*x\|^2 - (U^*x, e^{-i\theta}x) - (e^{-i\theta}x, U^*x) + \|x\|^2 \\ &= \|U^*x\|^2 - \|x\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

故 $U^*x = e^{-i\theta}x$, $|T|x = \lambda U^*x = |\lambda|x$, 因而 $T^*x = |T|U^*x = \bar{\lambda}x$.

定理 5.5.1 设 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 且 $p + r = 1$, $q \geq 1$.

- (1) 如果 $Tx = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, 则 $T^*x = \bar{\lambda}x$.
- (2) 有 $\sigma_{jp}(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\}$.
- (3) 如果 $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, 且 $\lambda \neq \mu$, 则 $(x, y) = 0$.

特别地, 当 T 是 $wA(p, r)$ 类算子, 其中 $p + r = 1$, 且 $p, r > 0$ 时, 上述 (1)~(3) 都成立.

证 (1) 由引理 5.5.1, 只要证明 $\tilde{T}_{p,r}$ 具有性质: $(\tilde{T}_{p,r})x = \lambda x$, $\lambda \neq 0$ 蕴含 $(\tilde{T}_{p,r})^*x = \bar{\lambda}x$. 事实上, 由定理 5.2.7 知存在 $\alpha_0 > 0$ 使 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 α_0 -

亚正常的, 而对 $p \in (0, \frac{1}{2})$ 亚正常算子, 有 $\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T)$ (见 [76]), 故上述结论成立.

(2),(3) 可由 (1) 得出.

利用 Berberian 的技巧, 可证下列结果:

定理 5.5.2 设 T 是 $wF(p, r, q)$ 算子, 且 $p + r = 1, q \geq 1$, 则

$$\sigma_{ja}(T) - \{0\} = \sigma_a(T) - \{0\}.$$

引理 5.5.2 (Berberian)^[89] 设 H 是复 Hilbert 空间, 则存在一个复 Hilbert 空间 $K \supseteq H$ 及一个映射 $\varphi: B(H) \rightarrow B(K)$ 使

- (1) φ 是一个 $*$ -代数同构, 即 φ 满足
- (a) $\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B), \forall A, B \in B(H), \alpha, \beta \in \mathbb{C};$
- (b) $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B);$
- (c) $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*;$
- (d) 当 $\varphi(A) = 0$ 时, 必有 $A = 0;$
- (2) φ 是一个等距, 保序映射, 当 $A \geq 0$ 时, 有 $\varphi(A) \geq 0;$
- (3) $\sigma_a(T) = \sigma_a(\varphi(T)) = \sigma_p(\varphi(T)), \forall T \in B(H);$
- (4) $\sigma_{ja}(T) = \sigma_{jp}(\varphi(T)), \sigma(T) = \sigma(\varphi(T)).$

现给出定理 5.5.2 的证明如下:

定理 5.5.2 的证明 设 $\varphi: B(H) \rightarrow B(K)$ 是上述引理所述一个 $*$ -代数同构, 且 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 则

$$\begin{aligned} & (|\varphi(T^*)|^r |\varphi(T)|^{2p} |\varphi(T^*)|^r)^{\frac{1}{q}} \\ &= \varphi\left((|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &\geq \varphi\left(|T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}\right) = |\varphi(T^*)|^{\frac{2(p+r)}{q}}. \end{aligned}$$

类似可证

$$|\varphi(T)|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq (|\varphi(T)|^p |\varphi(T^*)|^{2r} |\varphi(T)|^p)^{1-\frac{1}{q}},$$

从而 $\varphi(T)$ 也是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 对 $p + r = 1$, 且 $q \geq 1$, 于是有

$$\begin{aligned}\sigma_a(T) - \{0\} &= \sigma_a(\varphi(T)) - \{0\} = \sigma_p(\varphi(T)) - \{0\} \\ &= \sigma_{jp}(\varphi(T)) - \{0\} = \sigma_{ja}(T) - \{0\}.\end{aligned}$$

推论 5.5.1 如果 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 且 $p + r = 1, q \geq 1$, 则

$$\sigma(T) - \{0\} = (\sigma_a(T^*) - \{0\})^* = \{\lambda : \bar{\lambda} \in \sigma_a(T^*) - \{0\}\}.$$

证 显见, 只需证明 $\sigma(T) - \{0\} \subseteq (\sigma_a(T^*) - \{0\})^*$. 事实上, 由 [89] 知, $\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_p(T^*)^*$, 对一切 $T \in B(H)$ 成立. 由 $\sigma_p(T^*)^* \subseteq \sigma_a(T^*)^*$ 及由定理 5.5.2, 得

$$\sigma_a(T) - \{0\} = \sigma_{ja}(T) - \{0\} \subseteq (\sigma_a(T^*) - \{0\})^*.$$

推论 5.5.2 设 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 对 $p + r = 1, q \geq 1$, 如果 $\lambda \neq 0$ 使 $\lambda \in \sigma_a(T)$, 则 $|\lambda| \in \sigma_a(|T|) \cap \sigma_a(|T^*|)$.

证 由定理 5.5.2 得 $\sigma_a(T) - \{0\} = \sigma_{ja}(T) - \{0\}$, 故 $\lambda \in \sigma_{ja}(T) - \{0\}$, 从而存在向量列 x_n , 使

$$(T - \lambda)x_n \rightarrow 0, (T^* - \bar{\lambda})x_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由引理 5.4.1 可得

$$(|T| - |\lambda|)x_n \rightarrow 0, (|T^*| - |\lambda|)x_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

从而 $|\lambda| \in \sigma_a(|T|) \cap \sigma_a(|T^*|)$.

最后, 考虑 T 与 $|T|$ 的谱之间的关系. 回忆下列结果:

定理 5.5.A ^{[16],[89]} 若 T 是 p -亚正常的, 则 $\sigma(|T|) \subseteq \rho(\sigma(T))$, 其中 $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 是由 $\rho(z) = |z|$ 所定义的映射.

类似地, A. Aluthge 和 D. Wang 在 Hokkaido Mathematical Journal Vol XXIX, No.2 中证明了:

定理 5.5.B 若 T 是 w -亚正常的, 且 $\sigma(T)$ 连通, 则 $\sigma(|T|) \subseteq \rho(\sigma(T))$, 其中 $\rho(z) = |z|$.

我们把这一结果推广至 $wF(p, r, q)$ 类算子. 为此先回忆数值值域 $W(T) = \{(Tx, x) : x \in H, \text{是单位向量}\}$, 用 $\overline{W(T)}$ 表示 $W(T)$ 的闭

包. 我们知道 $W(T)$ 是凸集且 $\text{Conv } \sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$. 此外, 若 T 正规, 则 $\overline{W(T)} = \text{Conv } \sigma(T)$ (见 [50]).

引理 5.5.3 ^[63] 设 A, B 是 H 上的有界线性算子, 且 $A^* = A$, 则 AB 可逆当且仅当 BA 可逆.

证 如果 AB 可逆, 则存在 X 使得 $ABX = I$, 故 $(BX)^*A = I$, 从而 A 及 B 可逆, 于是 BA 可逆.

引理 5.5.4 设 $T = U|T|$ 是 T 的极分解, 则 $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T}_{p,r})$, 其中 $p, r > 0$ 且 $p + r = 1$.

证 由引理 5.5.3 及 $\sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}$ 可知.

引理 5.5.5 $(\text{Conv } \sigma(|T|))^{\alpha_0} = \text{Conv } \sigma(|T|^{\alpha_0}) = \text{Conv}(\sigma(|T|))^{\alpha_0}$ 对一切 $T \in \mathcal{B}(H)$ 及 $\alpha_0 > 0$ 成立, 其中 $(\sigma(|T|))^{\alpha_0} = \{z^{\alpha_0} : z \in \sigma(|T|)\}$.

证 由于 $\text{Conv } \sigma(|T|) = [m, M]$, 其中 $M = \sup\{\mu : \mu \in \sigma(|T|)\}$ 及 $m = \inf\{\mu : \mu \in \sigma(|T|)\}$, 故

$$\begin{aligned} (\text{Conv } \sigma(|T|))^{\alpha_0} &= [m^{\alpha_0}, M^{\alpha_0}] = \text{Conv } \sigma(|T|^{\alpha_0}) \\ &= \text{Conv}(\sigma(|T|))^{\alpha_0}. \end{aligned}$$

引理 5.5.6 设 $T = U|T|$ 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, $p + r = 1, q \geq 1$, 则

- (1) $\overline{W}(|\tilde{T}_{p,r}|) \subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$;
- (2) $\sigma(|T|) \subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$.

证 (1) 由于 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, 由定理 5.2.7 知存在 $\alpha_0 > 0$, 使 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 α_0 -亚正常算子, 即

$$|\tilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0} \geq |T|^{2\alpha_0} \geq |(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}. \quad (5.5.1)$$

因为 $\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^2) - \{0\} = \sigma(|\tilde{T}_{p,r}|^2) - \{0\}$, 故

$$\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) - \{0\} = \sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) - \{0\}.$$

又由 $|\tilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0} \geq |(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}$, 故当 $0 \in \sigma(|\tilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0})$ 时, 有 $0 \in \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0})$,

从而可知, 如果 $0 \in \sigma(|\tilde{T}_{p,r}|)$, 就有 $0 \in \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$, 即 $\sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) \subseteq \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$, 结果有

$$\overline{W}(|\tilde{T}_{p,r}|) = \text{Conv } \sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) \subseteq \text{Conv } \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) = \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|).$$

(2) 对 H 中任一单位向量 x , 有

$$((|\tilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0})x, x) \in W(|\tilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0}) \subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}),$$

故 $((|T|^{2\alpha_0})x, x) \in \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0})$. 这是由于 (5.5.1) 及 $\overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0})$ 的凸性. 故

$$\begin{aligned} \sigma(|T|^{2\alpha_0}) &\subseteq \text{Conv } \sigma(|T|^{2\alpha_0}) = \overline{W}(|T|^{2\alpha_0}) \\ &\subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}) = \text{Conv } \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}). \end{aligned}$$

由谱映射定理及引理 5.5.5 得 (2) 成立.

定理 5.5.3 如果 T 是 $wF(p, r, q)$ 类算子, $p+r=1$, $q \geq 1$ 且 $\sigma(T)$ 是连通的, 则 $\sigma(|T|) \subseteq \rho(\sigma(T))$, 其中 $\rho: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ 是由 $\rho(z) = |z|$ 所定义的映射.

证 由定理 5.5.A 及引理 5.5.4 知

$$\sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) \subseteq \rho(\sigma(\tilde{T}_{p,r})) = \rho(\sigma(T)).$$

又若 $0 \in \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$, 则 $(\tilde{T}_{p,r})^*$ 不可逆, 故 $0 \in \sigma(T)$, 及 $\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) \subseteq \rho(\sigma(T))$ (因为 $\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) - \{0\} = \sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) - \{0\}$).

另一方面, $\sigma(T)$ 是紧连通集, 故 $\rho(\sigma(T))$ 是 \mathbf{R} 中闭凸子集, 故由引理 5.5.6, 得

$$\begin{aligned} \sigma(|T|) &\subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) = \text{Conv } \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) \\ &\subseteq \text{Conv } \rho(\sigma(T)) = \rho(\sigma(T)). \end{aligned}$$

对 w -亚正常算子, 有

定理 5.5.C 设 T 是 w -亚正常算子, 如果 $\sigma(|T|)$ 或 $\sigma(|T^*|)$ 不是一个区间, 则 T 有非平凡的不变子空间.

该结果也可推广至 $wF(p, r, q)$ 类算子. 首先回忆: 如果复数 λ 使 $R(T - \lambda I)$ 不在 H 中稠密, 称 λ 在 T 的压缩谱 $\sigma_c(T)$ 中. 如果 $T \in \mathcal{B}(H)$, 易知 $\sigma(T) = \sigma_c(T) \cup \sigma_a(T)$ 且如果 $\lambda \in \sigma_c(T)$ 且 $T \neq \lambda I$, 则 $\overline{R(T - \lambda I)}$ 就是 T 的一个非平凡的不变子空间. 另外, 如果 $\sigma(T)$ 不连通, 由 [18] 知存在一个非平凡的幂等算子, 从而 T 也有一个非平凡的不变子空间.

定理 5.5.4 (1) 如果 $T \in wF(p, r, q)$, 且 $p + r = 1, q \geq 1$. 如果 $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$, 及 $|\lambda| \notin \sigma(|T|) \cap \sigma(|T^*|)$, 则 T 有非平凡的不变子空间.

(2) 如果 $T \in wF(p, r, q)$, 且 $p + r = 1, q \geq 1$. 如果 $\sigma(|T|)$ 或 $\sigma(|T^*|)$ 不连通, 则 T 有非平凡的不变子空间.

证 (1) 由推论 5.5.2 知, λ 不在 $\sigma_a(T)$ 中, 故 $\lambda \in \sigma_c(T)$, 故结论成立.

(2) 不妨设 $\sigma(|T^*|)$ 不连通. 如果 $\sigma(T)$ 不连通, 则可找到一个非平凡的幂等算子与 T 可换, 从而结论显见, 故可设 $\sigma(T)$ 连通, 由 $\sigma(|T^*|)$ 不是一个区间, 从而存在 $s, t \in \sigma(|T^*|), 0 \leq s < t$ 使 $(s, t) \cap \sigma(|T^*|) = \emptyset$.

令 $N = \{y : s < |y| < t\}$, 由于 $\sigma(|T|) - \{0\} = (\sigma(|T^*|) - \{0\})$, 那么由定理 5.5.3 知, 存在 $v \in \sigma(T)$, 使 $|v| = t$.

类似地, 如果 $s > 0$, 存在 $u \in \sigma(T)$, 使 $|u| = s$.

如果 $s = 0$, 则 T^* 不可逆, 从而 $0 \in \sigma(T)$, 故圆环 N 的内、外边界都含有 $\sigma(T)$ 中一点, 故由连通性 $N \cap \sigma(T) \neq \emptyset$, 即存在 $\lambda \in N \cap \sigma(T)$, 即 $|\lambda| \in (s, t)$ 且 $|\lambda| \notin \sigma(|T^*|)$, 从而 λ 满足 (i) 中的条件, 因此结论成立.

5.6 p -亚正常算子及对数-亚正常算子的幂

设 \mathbf{N} 表示自然数集, 本节讨论 p -亚正常算子及对数-亚正常算子的幂的不等式. 首先回忆一下关于幂的一些结果.

定理 5.6.A [56] 设 T 是 p -亚正常算子, $p \in (0, 1]$, 则对一切正整数 n 有

$$(T^{n*}T^n)^{\frac{p+1}{n}} \geq \dots \geq (T^{2*}T^2)^{\frac{p+1}{2}} \geq (T^*T)^{p+1}$$

及

$$(TT^*)^{p+1} \geq (T^2T^{2*})^{\frac{p+1}{2}} \geq \dots \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p+1}{n}}.$$

定理 5.6.B [66],[108] 设 $k, m \in \mathbb{N}$, 若 T 是 p -亚正常算子, $p \in (k-1, k]$, 则

(1) 当 $m \geq p$ 时,

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p+1}{m+1}} \geq (T^*T)^{p+1},$$

$$(TT^*)^{p+1} \geq (T^{m+1}T^{m+1*})^{\frac{p+1}{m+1}};$$

(2) 当 $m < p$ 时,

$$T^{m+1*}T^{m+1} \geq (T^*T)^{m+1}, \quad (TT^*)^{m+1} \geq T^{m+1}T^{m+1*}.$$

注 该定理 (2) 的证明可直接由 p -亚正常算子的定义和 L-H 不等式得出; (1) 的证明可用归纳法证明: 如 $m = k+1$ 时, 先由 (2) 和 L-H 不等式得

$$A_k = (T^{k*}T^k)^{\frac{p}{k}} \geq (T^*T)^p \geq B_1,$$

于是

$$\begin{aligned} (T^{k+1*}T^{k+1})^{\frac{p+1}{k+1}} &= U^* \left(B_1^{\frac{1}{2p}} A_k^{\frac{k}{p}} B_1^{\frac{1}{2p}} \right)^{\frac{p+1}{k+1}} U \\ &\geq U^* B_1^{1+\frac{1}{p}} U = (T^*T)^{1+p}. \end{aligned}$$

定理 5.6.C [90] 若 T 是对数-亚正规算子, 则对一切自然数 n , 都有

$$(T^{n+1*}T^{n+1})^{\frac{n}{n+1}} \geq T^{n*}T^n, \quad (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{n}{n+1}} \leq T^nT^{n*}.$$

定理 5.6.D [108] 若 T 是对数-亚正规算子, 则对一切 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有

$$(T^{m+n*}T^{m+n})^{\frac{n}{m+n}} \geq T^{n*}T^n, \quad (T^{m+n}T^{m+n*})^{\frac{n}{m+n}} \leq T^nT^{n*}.$$

首先证明下面的定理:

定理 5.6.1 下列条件等价:

(1) 设 $m, k \in \mathbb{N}$, 若 $k \geq 1, m \geq p$ 且 T 是 p -亚正常算子, $p \in (k-1, k]$, 则

$$(T^{1+m*}T^{1+m})^{\frac{1+p}{1+m}} \geq (T^*T)^{1+p},$$

$$(TT^*)^{p+1} \geq (T^{m+1}T^{m+1*})^{\frac{p+1}{m+1}};$$

(2) 设 $m, k \in \mathbf{N}$, 若 $k \geq 1$, $m < p$ 且 T 是 p -亚正常算子, $p \in (k-1, k]$, 则

$$T^{m+1*}T^{m+1} \geq (T^*T)^{m+1}, \quad (TT^*)^{m+1} \geq T^{m+1}T^{m+1*}.$$

证 (1) \Rightarrow (2) 设 $k \geq 2$, $m, k \in \mathbf{N}$, 如果对某 $p \in (k-1, k]$, T 是 p -亚正常算子, 则对每个 $m \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, T 是 m -亚正常算子; 当 $m=1$ 时, 由此时 T 是亚正常的, 从而 $T^{*2}T^2 \geq (T^*T)^2$; 当 $m \geq 2$ 时, 在 (1) 中取 $k=p=m$ 得

$$T^{m+1*}T^{m+1} \geq (T^*T)^{m+1}, \quad (TT^*)^{m+1} \geq T^{m+1}T^{m+1*}.$$

(2) \Rightarrow (1) 设 $k \geq 1$, $m, k \in \mathbf{N}$. 如果对某 $p \in (k-1, k]$, T 是 p -亚正常算子, 则

$$T^{k*}T^k \geq (T^*T)^k, \quad (TT^*)^k \geq T^kT^{k*}.$$

故由 L-H 不等式得

$$(T^{k*}T^k)^{\frac{p}{k}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^kT^{k*})^{\frac{p}{k}}.$$

(a) 如果 $m=k$, 由 $(T^{k*}T^k)^{\frac{p}{k}} \geq (TT^*)^p$ 及 Furuta 不等式得

$$\begin{aligned} (T^{k+1*}T^{k+1})^{\frac{p+1}{k+1}} &= (U^*|T^*|T^{k*}T^k|T^*|U)^{\frac{p+1}{k+1}} \\ &= U^* \left[(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}} (|T^k|^{\frac{2p}{k}})^{\frac{k}{p}} (|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}} \right]^{\frac{p+1}{k+1}} U \\ &\geq U^* (|T^*|^{2p})^{\frac{1+p}{p}} U = U^* |T^*|^{2(p+1)} U \\ &= (T^*T)^{1+p}. \end{aligned}$$

类似可证 $(T^{k+1}T^{k+1*})^{\frac{p+1}{k+1}} \leq (TT^*)^{1+p}$.

(b) 假如 (1) 对某 $m \geq k$ 成立, 下证对 $m+1$ 亦成立.

事实上, 由

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^{m+1}T^{m+1*})^{\frac{p}{m+1}},$$

故 $(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (TT^*)^p$. 再利用 Furuta 不等式得

$$\begin{aligned}
 & (T^{1+m+1*}T^{1+m+1})^{\frac{p+1}{1+m+1}} \\
 &= (U^*|T^*|T^{1+m*}T^{1+m}|T^*|U)^{\frac{p+1}{1+m+1}} \\
 &= U^* \left[(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}} (|T^{1+m}|^{\frac{2p}{1+m}})^{\frac{m+1}{p}} (|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}} \right]^{\frac{p+1}{1+m+1}} U \\
 &\geq U^* (|T^*|^{2p})^{\frac{1+p}{p}} U = U^* |T^*|^{2(p+1)} U \\
 &= (T^*T)^{1+p}.
 \end{aligned}$$

类似可证 $(T^{1+m+1}T^{1+m+1*})^{\frac{p+1}{1+m+1}} \leq (TT^*)^{1+p}$.

推论 5.6.1 设 $m, n, k \in \mathbb{N}$, 若 T 是 p -亚正常算子, 其中 $p \in (k-1, k]$, 则

(1) 当 $n \geq k-1, m \geq k-1$ 时,

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{p}{n+1}};$$

(2) 当 $n < k-1$, 或 $m < k-1$ 时,

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{r+1}{n+1}},$$

其中 $r = \min\{m, n\}$.

证 (1) 当 $n, m \geq k-1$ 时, 我们来证

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^*T)^p, \quad (TT^*)^p \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{p}{n+1}}.$$

事实上, 当 $m = k-1$ 时, 由定理 5.6.B (2) 及 L-H 不等式即可证明. 当 $m \geq k$ 时, 由定理 5.6.B (1) 及 L-H 不等式可得

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^*T)^p.$$

类似可证第二个不等式. 从而

$$\begin{aligned}
 (T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} &\geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \\
 &\geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{p}{n+1}}.
 \end{aligned}$$

(2) 若 $n \leq k-1$, 或 $m \leq k-1$, 我们来证

$$\begin{aligned}(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} &\geq (T^*T)^{r+1}, \\ (TT^*)^{r+1} &\geq (T^{m+1}T^{n+1*})^{\frac{r+1}{n+1}},\end{aligned}$$

其中 $r = \min\{m, n\}$.

事实上, 当 $m \leq k-1$ 时, 由定理 5.6.B (2) 及 $\frac{r+1}{m+1} \in (0, 1]$ 可得; 当 $m > k-1$ 时, 由定理 5.6.B (1) 知

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p+1}{m+1}} \geq (T^*T)^{p+1};$$

于是可得

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} \geq (T^*T)^{r+1}.$$

类似可证第二个不等式. 再由 $r+1 \leq k-1 \leq p$ 得

$$\begin{aligned}(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} &\geq (T^*T)^{r+1} \geq (TT^*)^{r+1} \\ &\geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{r+1}{n+1}}.\end{aligned}$$

为证明本节的主要结果, 首先回忆, 由定理 2.2.3 可知下列结果:

引理 5.6.A 设 $A, B \geq 0$, 且对某 $\alpha > 0$, 有 $A^\alpha \geq B^\alpha$, 则对每个 $q \geq 0$ 及 $t \geq 0$, 有 $f(s) = \left(A^{\frac{t}{2}}B^sA^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{q+t}{s+t}}$ 在 $s \geq q$ 上单调下降, $g(s) = \left(B^{\frac{t}{2}}A^sB^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{q+t}{s+t}}$ 在 $s \geq q$ 上单调上升.

引理 5.6.1 设 T 是 p -亚正常算子, 其中 $p \in (k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned}(|T^*||T^{m+n}|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}} &\geq |T^*||T^{m+n}|^{\frac{2(n+p)}{m+n}}|T^*|, \\ (|T||T^{m+n*}|^2|T|)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}} &\leq |T||T^{m+n*}|^{\frac{2(n+p)}{m+n}}|T|,\end{aligned}$$

其中 $m, n \in \mathbb{N}$ 且 $m \geq k$.

此外, 若 $k = 1, 2$, 则

$$|T^*||T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T^*| \geq (|T^*||T^n|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}},$$

$$|T||T^{n*}|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T| \leq (|T||T^{n*}|^2|T|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}$$

对一切 $n \in \mathbb{N}$ 均成立.

证 令 $r = \min\{1, p\}$, 则由定理 5.6.A 及 L-H 不等式可得

$$\begin{aligned} (T^{n*}T^n)^{\frac{r}{n}} &\geq \dots \geq (T^{2*}T^2)^{\frac{r}{2}} \geq (T^*T)^r \geq (TT^*)^r \\ &\geq (T^2T^{2*})^{\frac{r}{2}} \geq \dots \geq (T^nT^{n*})^{\frac{r}{n}}. \end{aligned}$$

由此知

$$\left(|T^{n+m}|^{\frac{2}{n+m}}\right)^r \geq (|T^*|^2)^r.$$

故对每个 $t \geq 0$ 及 $q \geq 0$, 函数 $g(s) = \left(|T^*|^t |T^{n+m}|^{\frac{2s}{n+m}} |T^*|^t\right)^{\frac{q+t}{s+t}}$ 在 $s \geq q \geq 0$ 上是单调增加的. 取 $t = 1$, $q = n + p$ 及 $s = n + m$, 则我们有

$$\begin{aligned} &(|T^*||T^{n+m}|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}} \\ &= \left(|T^*||T^{n+m}|^{\frac{2(n+m)}{n+m}}|T^*|\right)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}} \\ &= g(n+m) \geq g(n+p) \\ &= \left(|T^*||T^{n+m}|^{\frac{2(n+p)}{n+m}}|T^*|\right)^{\frac{n+1+p}{n+1+p}} \\ &= |T^*||T^{n+m}|^{\frac{2(n+p)}{n+m}}|T^*|. \end{aligned}$$

类似可证第二个不等式.

若 $k = 1, 2$, 则 $p \in (0, 1]$ 或 $(1, 2]$, 故 $r + n \geq r + 1 \geq p$ 及

$$\left(1 + \frac{n}{r}\right) \frac{1+n}{p} \geq \frac{1}{r} + \frac{n}{r}$$

成立. 对 $|T^n|^{\frac{2r}{n}}$ 及 $|T^*|^{2r}$ 应用 Furuta 不等式知

$$\begin{aligned} |T^n|^{\frac{2p}{n}} &= |T^n|^{\frac{2r}{n} \frac{p}{r}} \geq \left(|T^n|^{\frac{2r}{n} \frac{n}{2r}} |T^*|^{2r \frac{1}{r}} |T^n|^{\frac{2r}{n} \frac{n}{2r}}\right)^{\frac{p}{n+1}} \\ &= (|T^n||T^*|^2|T^n|)^{\frac{p}{n+1}}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
|T^*||T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T^*| &= |T^*||T^n||T^n|^{\frac{2p}{n}}|T^n||T^*| \\
&\geq |T^*||T^n|(|T^n||T^*|^2|T^n|)^{\frac{p}{n+1}}|T^n||T^*| \\
&= (|T^*||T^n|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}.
\end{aligned}$$

类似可证第二个不等式.

适当修改一下引理 5.6.1 的证明, 可得如下结果:

引理 5.6.2 设 $k, n \in \mathbf{N}$, 且 $p \in (k-1, k]$, 若 T 是 p -亚正常算子, 当 $n \geq k$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|T^*||T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T^*| &\geq (|T^*||T^n|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}, \\
|T||T^{n*}|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T| &\leq (|T||T^{n*}|^2|T|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}.
\end{aligned}$$

证 设 $k \in \mathbf{N}$, $p \in (k-1, k]$, 且 $n \geq k$, 则由定理 5.6.B (当 $n > k$ 时由定理 5.6.B (1); 当 $n = k$ 时由定理 5.6.B (ii)) 及 L-H 不等式得

$$(T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p}{n}}.$$

现对 $(T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} = |T^n|^{\frac{2p}{n}} \geq |T^*|^{2p}$ 应用 Furuta 不等式可得 (因为 $\frac{n+1}{p} > 1$, 且 $(1 + \frac{n}{p}) \frac{n+1}{p} \geq \frac{1}{p} + \frac{n}{p}$)

$$\begin{aligned}
|T^n|^{\frac{2p}{n}} &\geq (|T^n|^{\frac{2p}{n} \frac{n}{2p}} |T^*|^{2p \frac{1}{p}} |T^n|^{\frac{2p}{n} \frac{n}{2p}})^{\frac{p}{n+1}} \\
&= (|T^n||T^*|^2|T^n|)^{\frac{p}{n+1}}
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
|T^*||T^n|^{\frac{2(p+n)}{n}}|T^*| &= |T^*||T^n||T^n|^{\frac{2p}{n}}|T^n||T^*| \\
&\geq |T^*||T^n|(|T^n||T^*|^2|T^n|)^{\frac{p}{n+1}}|T^n||T^*| \\
&= (|T^*||T^n|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}.
\end{aligned}$$

类似可证另一个不等式.

定理 5.6.2 设 $k, n, m \in \mathbb{N}$, 且 $p \in (k-1, k]$, 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$(T^{n+m}T^{n+m})^{\frac{n+r}{n+m}} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+r}{n}},$$

$$(T^nT^{n*})^{\frac{n+r}{n}} \geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+r}{n+m}},$$

其中 $r = \min\{p, n, m\}$.

为了证明的叙述方便, 把这个定理写成下列形式:

定理 5.6.2' (1) 设 $k \geq 1$, $n, m \geq k$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$(T^{n+m}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+p}{n}}, \quad (5.6.1)$$

$$(T^nT^{n*})^{\frac{n+p}{n}} \geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+p}{n+m}}. \quad (5.6.2)$$

(2) 设 $k \geq 2$, $1 \leq m < k$, $n \geq m$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$T^{n+m}T^{n+m} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+m}{n}}, \quad (5.6.3)$$

$$(T^nT^{n*})^{\frac{n+m}{n}} \geq T^{n+m}T^{n+m*}. \quad (5.6.4)$$

(3) 设 $k \geq 2$, $1 \leq n < k$, $m \geq n$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$(T^{n+m}T^{n+m})^{\frac{2n}{n+m}} \geq (T^{n*}T^n)^2, \quad (5.6.5)$$

$$(T^nT^{n*})^2 \geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{2n}{n+m}}. \quad (5.6.6)$$

证 设 $T = U|T|$ 是 T 的极分解, 从而 T^* 的极分解为 $T^* = U^*|T^*|$.

(1) 先证 (5.6.1). 设 $k \geq 1$, $n, m \geq k$, 且 $p \in (k-1, k]$. 首先证明当 $n \geq k$ 时, 下式成立:

$$(T^{n+k}T^{n+k})^{\frac{n+p}{n+k}} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+p}{n}}. \quad (5.6.7)$$

首先证明 $n = k$ 时上式成立. 事实上, 令 $S = T^k$, 则由定理 5.6.B 知 S 是 $\frac{p}{k}$ -亚正常算子, 由定理 5.6.A 知

$$(S^{2*}S^2)^{\frac{1+\frac{p}{k}}{2}} \geq (S^*S)^{1+\frac{p}{k}},$$

即

$$(T^{2k} * T^{2k})^{\frac{k+p}{2k}} \geq (T^{k*} T^k)^{\frac{k+p}{k}}.$$

假设 (5.6.7) 对某 $n \geq k$ 成立, 下证它对 $n+1$ 亦成立.

事实上, 由引理 5.6.1、引理 5.6.2 及归纳假设有

$$\begin{aligned} & (T^{n+k+1} * T^{n+k+1})^{\frac{n+p+1}{n+1+k}} \\ &= (T^* |T^{n+k}|^2 T)^{\frac{n+p+1}{n+1+k}} \\ &= U^* (|T^*| |T^{n+k}|^2 |T^*|)^{\frac{n+p+1}{n+1+k}} U \\ &\geq U^* |T^*| |T^{n+k}|^{\frac{2(n+p)}{n+k}} |T^*| U \\ &\geq U^* |T^*| |T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}} |T^*| U \\ &\geq U^* (|T^*| |T^n|^2 |T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}} U \\ &= (T^{n+1} * T^{n+1})^{\frac{n+p+1}{n+1}}. \end{aligned}$$

故它对 $n+1$ 亦成立.

由 (5.6.7) 知, (5.6.1) 当 $m = k$ 时成立. 下面证明当 $m > k$ 时亦成立.

事实上, 当 $k = 1$ 时, 由 (5.6.7) 直接可知结论成立. 当 $k > 1$ 时, 由 T 是 p -亚正常算子, $p > k - 1 \geq 1$, 故 T 是亚正常算子, 现对亚正常算子应用 (5.6.7), 并取 $k = p = 1$, 又有

$$T^{n+1} * T^{n+1} \geq (T^n * T^n)^{\frac{n+1}{n}}.$$

故

$$\begin{aligned} T^{n+m} * T^{n+m} &\geq (T^{n+m-1} * T^{n+m-1})^{\frac{n+m}{n+m-1}}, \\ &\dots, \\ T^{n+k+1} * T^{n+k+1} &\geq (T^{n+k} * T^{n+k})^{\frac{n+k+1}{n+k}}. \end{aligned}$$

又

$$(T^{n+k} * T^{n+k})^{\frac{n+p}{n+k}} \geq (T^n * T^n)^{\frac{n+p}{n}},$$

故由 L-H 不等式知

$$\begin{aligned} (T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}} &\geq (T^{m+m-1*}T^{m+m-1})^{\frac{n+p}{n+m-1}} \geq \dots \\ &\geq (T^{n+k*}T^{n+k})^{\frac{n+p}{n+k}} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+p}{n}}. \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

故 (5.6.1) 成立, 类似可证明 (5.6.2).

(2) 设 $k > 1$, $1 \leq m < k$, $n \geq m$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则 T 是 m -亚正常算子, 故对每个 $j \in \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$ 有

$$\begin{aligned} T^{n+j*}T^{n+j} &\geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+j}{n}}, \\ T^{n+j}T^{n+j*} &\leq (T^nT^{n*})^{\frac{n+j}{n}}. \end{aligned}$$

事实上, 只要在 (5.6.1), (5.6.2) 中考虑 $k = p = m$ 时的情形就可以了.

(3) 设 $1 \leq n < k$, $m \geq n$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则 T 是 n -亚正常算子, 故

$$\begin{aligned} (T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{2n}{n+m}} &\geq (T^{n*}T^n)^2, \\ (T^nT^{n*})^2 &\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{2n}{n+m}}. \end{aligned}$$

事实上, 只要在 (5.6.1), (5.6.2) 中考虑 $k = p = n$ 时的情形就可以了.

从上述定理的证明过程中可知

推论 5.6.2 (1) 设 $k \geq 1$, $n, m \geq k$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$\begin{aligned} (T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}} &\geq \dots \geq (T^{m+k*}T^{m+k})^{\frac{n+p}{n+k}} \\ &\geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+p}{n}}, \\ (T^nT^{n*})^{\frac{n+p}{n}} &\geq (T^{m+k}T^{m+k*})^{\frac{n+p}{n+k}} \geq \dots \\ &\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+p}{n+m}}. \end{aligned}$$

(2) 设 $1 \leq m < k$, $n \geq m$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$\begin{aligned}
(T^{2n*}T^{2n})^{\frac{n+m}{2n}} &\geq (T^{2n-1*}T^{2n-1})^{\frac{n+m}{2n-1}} \geq \dots \\
&\geq T^{n+m*}T^{n+m} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+m}{n}}, \\
(T^nT^{n*})^{\frac{n+m}{n}} &\geq T^{n+m}T^{n+m*} \geq \dots \\
&\geq (T^{2n-1}T^{2n-1*})^{\frac{n+m}{2n-1}} \\
&\geq (T^{2n}T^{2n*})^{\frac{n+m}{2n}}.
\end{aligned}$$

(3) 设 $1 \leq n < k$, $m \geq n$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$\begin{aligned}
(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{2n}{n+m}} &\geq \dots \geq T^{n+n*}T^{n+n} \geq (T^{n*}T^n)^2, \\
(T^nT^{n*})^2 &\geq T^{n+n}T^{n+n*} \geq \dots \\
&\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{2n}{n+m}}.
\end{aligned}$$

其中 (3) 的证明, 可对 $p = n$ 应用 (5.6.8) 即可.

推论 5.6.3 (1) 设 $n, m \geq 1$, 且 $p \in (0, 1]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$\begin{aligned}
(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}} &\geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+p}{n}}, \\
(T^nT^{n*})^{\frac{n+p}{n}} &\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+p}{n+m}}.
\end{aligned}$$

(2) 设 $k, n, m \geq 1$, 且 $p \in (k-1, k]$. 若 T 是 p -亚正常算子, 则

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad (T^{1+m*}T^{1+m})^{\frac{1+\min\{p,m\}}{1+m}} &\geq (T^*T)^{1+\min\{p,m\}}, \\
&\quad (TT^*)^{1+\min\{p,m\}} \geq (T^{1+m}T^{1+m*})^{\frac{1+\min\{p,m\}}{1+m}}; \\
\text{(b)} \quad (T^{n+1*}T^{n+1})^{\frac{n+\min\{p,1\}}{n+1}} &\geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+\min\{p,1\}}{n}}, \\
&\quad (T^nT^{n*})^{n+\min\{p,1\}} \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{n+\min\{p,1\}}{n+1}}.
\end{aligned}$$

其中 (2) 的证明如下:

(a) 当 $k = 1$ 时, 由 (5.6.7) 可得

$$(T^{1+m*}T^{1+m})^{\frac{1+p}{1+m}} \geq (T^*T)^{1+p};$$

当 $k \geq 2$ 时, (a) 由定理 5.6.1 (1),(2) 可知.

(b) 当 $k \geq 2$ 时, 由推论 5.6.2 (2), 令 $m = 1$, 得

$$T^{n+1} * T^{n+1} \geq (T^n * T^n)^{\frac{n+1}{n}},$$

再由 L-H 不等式可得.

下面介绍 p -亚正常算子及 \log -亚正常算子指数的最优性估计.

定理 5.6.3 设 k, m, n 为正整数, $p \in (k-1, k]$, $\alpha > 1$, 则

(1) 当 $m \geq p$ 时,

(a) 存在 p -亚正常算子 T 使得

$$(T^{m+m} * T^{n+m})^{\frac{(n+p)\alpha}{n+m}} \not\geq (T^n * T^n)^{\frac{(n+p)\alpha}{n}};$$

(b) 存在 p -亚正常算子 T 使得

$$(T^n T^{m*})^{\frac{(n+p)\alpha}{n}} \not\geq (T^{m+m} T^{n+m*})^{\frac{(n+p)\alpha}{n+m}};$$

(2) 当 $m < p$ 时,

(a) 存在 p -亚正常算子 T 使得

$$(T^{n+m} * T^{m+m})^\alpha \not\geq (T^n * T^n)^{\frac{(n+m)\alpha}{n}};$$

(b) 存在 p -亚正常算子 T 使得

$$(T^n T^{m*})^{\frac{(n+m)\alpha}{n}} \not\geq (T^{n+m} T^{m+m*})^\alpha.$$

为了证明这一结果, 需要下列引理:

引理 5.6.B 设 $\delta > 0$, $p > 0$, $r > 0$ 及 $q > 0$. 如果 $0 < q < 1$ 或 $(\delta + r)q < p + r$, 则

(1) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B , 使得 $A^\delta \geq B^\delta$, 但有

$$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \not\geq B^{\frac{p+r}{q}};$$

(2) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B , 使得 $A^\delta \geq B^\delta$, 且有

$$A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}.$$

引理 5.6.C 设 $p > 0, r > 0$ 及 $q > 0$. 如果 $rq < p + r$, 则

(1) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B , 使得 $\log A \geq \log B$, 且

$$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \not\geq B^{\frac{p+r}{q}};$$

(2) 存在 \mathbf{R}^2 上的正可逆算子 A, B , 使得 $\log A \geq \log B$, 且

$$A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}.$$

引理 5.6.3 对 H 上的正算子 A, B , 定义 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 为

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & B^{\frac{1}{2}} & 0 & & & & \\ & & B^{\frac{1}{2}} & (0) & & & \\ & & & A^{\frac{1}{2}} & 0 & & \\ & & & & A^{\frac{1}{2}} & 0 & \\ & & & & & A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ & & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $(,)$ 表示矩阵的 $(0,0)$ 位置, 则对 $\beta > 0$ 及 $n \in \mathbf{N}$, 有

(1) T 是 p -亚正常算子 ($p > 0$) 当且仅当

$$A^p \geq B^p;$$

(2) T 是对数-亚正常算子当且仅当 A, B 是可逆算子且

$$\log A \geq \log B;$$

(3) $(T^{n+m*} T^{n+m})^{\frac{\beta}{n+m}} \geq (T^{n*} T^n)^{\frac{\beta}{n}}$ 当且仅当

$$(B^{\frac{l}{2}} A^{n+m-l} B^{\frac{l}{2}})^{\frac{\beta}{n+m}} \geq (B^{\frac{l}{2}} A^{n-l} B^{\frac{l}{2}})^{\frac{\beta}{n}}, \quad l = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$(B^{\frac{l}{2}} A^{n+m-l} B^{\frac{l}{2}})^{\frac{\beta}{n+m}} \geq B^{\beta}, \quad l = n, n+1, \dots, n+m-1;$$

$$(4) \quad (T^n T^{n*})^{\frac{\beta}{n}} \geq (T^{n+m} T^{n+m*})^{\frac{\beta}{n+m}} \text{ 当且仅当}$$

$$\left(A^{\frac{j}{2}} B^{n-j} A^{\frac{j}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n}} \geq \left(A^{\frac{j}{2}} B^{n+m-j} A^{\frac{j}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n+m}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$A^{\beta} \geq \left(A^{\frac{j}{2}} B^{n+m-j} A^{\frac{j}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n+m}}, \quad j = n, n+1, \dots, n+m-1.$$

证 通过计算表明

$$T^*T = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & (A) & & \\ & & & & A & \\ & & & & & A \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

及

$$TT^* = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & (B) & & \\ & & & & A & \\ & & & & & A \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

故 (1), (2) 易得, 只需比较 T^*T 与 TT^* 位置上的元素即可.

另一方面, 当 $n \geq 2$ 时, 可求得 T^n 是一个仅在第 n 个次对角线上取不为零的元素

$$\left(\dots, B^{\frac{n}{2}}, B^{\frac{n}{2}}, A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{n-1}{2}}, \dots, A^{\frac{n-1}{2}} B^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{n}{2}}, A^{\frac{n}{2}}, \dots\right),$$

其中第一个 $A^{\frac{n}{2}}$ 在第 0 列, 故

$$T^{n*}T^n = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B^n & & & & \\ & & B^{\frac{n-1}{2}}AB^{\frac{n-1}{2}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & B^{\frac{1}{2}}A^{n-1}B^{\frac{1}{2}} & \\ & & & & & (A^n) \\ & & & & & & A^n \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

比较一下 $T^{n+m*}T^{n+m}$ 与 $T^{n*}T^n$ 相应位置上的元素可证得 (3).

又

$$T^{n*}T^n = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B^n & & & & \\ & & (B^n) & & & \\ & & & A^{\frac{1}{2}}B^{n-1}A^{\frac{1}{2}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A^{\frac{n-1}{2}}BA^{\frac{n-1}{2}} \\ & & & & & & A^n \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

从而比较一下 T^nT^{n*} 与 $T^{n+m}T^{n+m*}$ 相应位置上的元素可证得 (4).

下面证明定理 5.6.3.

定理 5.6.3 的证明 令

$$p_1 = m > 0, \quad r_1 = n > 0, \quad q_1 = \frac{n+m}{(n+p_0)\alpha},$$

其中 $p_0 = \min\{p, m\}$ 及 $\delta = p > 0$, 则当 $m < p$ 时有 $q_1 < 1$; 或 $m \geq p$ 时有

$$(\delta + r_1)q_1 = (n+p)\frac{n+m}{(n+p_0)\alpha} < n+m = p_1 + r_1.$$

由引理 5.6.B (1), 存在 $H = \mathbf{R}^2$ 上的可逆正算子 A, B , 使得 $A^\delta \geq B^\delta$, 但有

$$\left(B^{\frac{r_1}{2}} A^{p_1} B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \not\geq B^{\frac{p_1+r_1}{q_1}},$$

即 $A^p \geq B^p$ 且

$$\left(B^{\frac{n}{2}} A^m B^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}} \not\geq B^{(n+p_0)\alpha}.$$

现定义 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 如引理 5.6.3 所示, 则 T 是 p -亚正常算子 ($p > 0$), 但由引理 5.6.3 (3) 知

$$(T^{n+m*} T^{n+m})^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}} \not\geq (T^{n*} T^n)^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n}}.$$

因为引理 5.6.3 (3) 中式子对 $l = n$, $\beta = (n + p_0)\alpha$ 时不成立, 故定理 5.6.3 中 (1) (a), (2) (a) 均成立.

再由引理 5.6.B (2), 存在 H 上可逆算子 A, B , 使得 $A^\delta \geq B^\delta$, 但有

$$A^{\frac{p_1+r_1}{q_1}} \not\geq \left(A^{\frac{r_1}{2}} B^{p_1} A^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

即 $A^p \geq B^p$ 且

$$A^{(n+p_0)\alpha} \not\geq \left(A^{\frac{n}{2}} B^m A^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}}.$$

定义 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 如引理 5.6.3 所示, 则 T 是 p -亚正常算子 ($p > 0$), 但由引理 5.6.3 (4) 知

$$(T^n T^{n*})^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n}} \not\geq (T^{n+m} T^{n+m*})^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}}.$$

从而定理 5.6.3 中 (1) (b), (2) (b) 亦成立.

仿照上面的证明, 有如下的关于对数-亚正常算子的结论:

定理 5.6.4 设 $m, n \in \mathbf{N}$, $\alpha > 1$, 则

(1) 存在一个对数-亚正常算子 T , 使得

$$(T^{n+m*} T^{n+m})^{\frac{n\alpha}{n+m}} \not\geq (T^{n*} T^n)^\alpha;$$

(2) 存在一个对数 - 亚正常算子 T , 使得

$$(T^n T^{n*})^\alpha \not\geq (T^{n+m} T^{n+m*})^{\frac{n\alpha}{n+m}}.$$

证 令

$$p_1 = m > 0, \quad r_1 = n > 0, \quad q_1 = \frac{n+m}{n\alpha},$$

则 $r_1 q_1 < p_1 + r_1$. 由引理 5.6.C (1), 存在 $H = \mathbf{R}^2$ 上的可逆正算子 A, B , 使得 $\log A \geq \log B$, 且

$$\left(B^{\frac{n}{2}} A^m B^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n\alpha}{n+m}} \not\geq B^{n\alpha}.$$

再定义 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 如引理 5.6.3 所示, 则由引理 5.6.3

(2) 知 T 是对数 - 亚正常算子, 但是

$$(T^{n+m*} T^{n+m})^{\frac{n\alpha}{n+m}} \not\geq (T^n T^{n*})^\alpha,$$

故定理 5.6.4 中 (1) 成立. 类似可证 (2) 亦成立.

索 引

- $A(k)$ 类 130
- $A(p, r)$ 类 130
- Ando 定理 78
- Berberian 定理 167
- 半 Fredholm 算子 161
- 部分等距 12
- 次正常算子 20
- 等距 12
- 对数 - 亚正规 129
- 仿正常 20
- 非奇异算子 100
- $F(p, r, q)$ 算子类 130
- Fredholm 算子 161
- Fuglede-Putnam-Rosenldum 定理 4
- Furuta 不等式 28
- Furuta 不等式的最优性 55
- Furuta 型算子单调函数 63
- 负幂 Furuta 不等式 32
- 负幂 Furuta 不等式的最优性 74
- 共轭算子 1
- 共轭线性算子 2
- 广义 Althuge 变换 159
- 广义 Furuta 不等式 31
- 广义 Furuta 不等式的最优性 62
- Hansen 不等式 77

- Heinz-Kato 定理 24
Hölder-McCarthy 不等式 48
混序 77
Jensen 不等式 137
极分解 14
降幂引理 17
Kantorovich 不等式 47
Kantorovich 常数 48
Kantorovich 型不等式 115
L-H 不等式 23
L-H 不等式的最优性 55
 p - 亚正常算子 129
谱 7
谱半径 7
算子平均 81
似正常算子 20
似凸算子 21
似谱算子 20
Riesz 表现定理 1
初始空间 12
数值值域 6
数值半径 6
算子单调函数 77
投影算子 5
算子熵 88
Toeplitz-Hausdorff 定理 6
 wA 算子 130
 $wA(s, t)$ 算子 130
 w - 亚正常算子 130
酉算子 4
正常算子 1
自伴算子 1

$wF(p, r, q)$ 算子类 131

Young 不等式 49

正交投影 13

正算子 5

终空间 13

参考文献

- [1] A. Aluthge, *On p -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **13** (1990), 307-315.
- [2] A. Aluthge, *Some generalized theorems on p -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **24** (1990), 497-501.
- [3] A. Aluthge and D. Wang, *Powers of p -hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **3** (1999), 279-284.
- [4] A. Aluthge and D. Wang, *w -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **36** (2000), 1-10.
- [5] A. Aluthge and D. Wang, *w -hyponormal operators II*, Integr. Equat. Oper. Th., **37** (2000), 324-331.
- [6] A. Aluthge and D. Wang, *An operator inequality which implies Paranormality*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 113-119.
- [7] T. Ando, *Operators with a norm condition*, Acta. Sci. Math. (Szeged), **33** (1972), 169-178.
- [8] T. Ando, *On some operator inequalities*, Math Ann., **279** (1987), 157-159.
- [9] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197-198** (1994), 113-131.
- [10] B. A. Barnes, *Common operator properties of the linear operators RS and SR* , Proc. Amer. Math. Soc., **126**(1998), 1055-1061.

- [11] E. Bach and T. Furuta, *Counterexample to a question on the operator equation $T(H^{1/n}T)^n = K$* , Linear Algebra Appl., **177** (1992), 157-162.
- [12] N. N. Chan and M. K. Kong, *Hermitian matrix inequalities and a conjecture*, Amer. Math. Monthly, **92** (1985), 533-541.
- [13] M. Chō and T. Huruya, *Square of w -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **39** (2001), 413-420.
- [14] M. Chō, T. Huruya and M. Itoh, *Spectra of completely log-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **37**(1) (2001), 413-420.
- [15] M. Chō, T. Huruya and Y. O. Kim, *A note on w -hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **7**(1)(2002), 1-10.
- [16] M. Chō and M. Itoh, *Putnam's inequality for p -hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (8) (1995), 2435-2440.
- [17] M. Chō and Y. Nagano, *Simple proof of the p -hyponormality of the Aluthge transformation*, Integr. Equat. Oper. Th., **33** (1999), 248-251.
- [18] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., World Publishing Corporation, Beijing, 2003.
- [19] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 413-415.
- [20] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, 2nd ed., World Publishing Corporation, Beijing, 2003.
- [21] J. I. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto, *Normal inequality equivalent to Heinz inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **118**(3) (1993), 827-830.
- [22] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Oper. Th., **23** (1990), 67-72.
- [23] M. Fujii, T. Furuta and D. Wang, *An application of the Furuta inequality to operator inequalities on chaotic order*, Math. Japonica, **40** (1994), 317-321.

- [24] M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3655-3658.
- [25] M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta's type operator inequalities*, Linear Multilinear Algebra, **43** (1998), 339-349.
- [26] M. Fujii and E. Kamei, *Mean theoretic approach to grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751-2756.
- [27] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179** (1993), 161-169.
- [28] M. Fujii and T. Furuta, *Löwner-Heinz, Cordes and Heinz-Kato inequalities*, Math Japonica, **38** (1993), 73-78.
- [29] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality*, Proc. Japan Acad. Ser. A **70** (1994), 239-242.
- [30] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality, III*, Math. Japon., **45** (1997), 25-32.
- [31] M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality, IV*, Math. Japon., **45** (1997), 511-518.
- [32] M. Fujii, D. Jung, S. H. Lee, M. Y. Lee and R. Nakamoto, *Some classes of operators related to paranormal and log-hyponormal operators*, Math. Japon., **51** (2000), 395-402.
- [33] M. Fujii and R. Nakamoto, *Some classes of operators derived from Furuta inequality*, Sci. Math., **3** (2000), 87-94.
- [34] T. Furuta, *Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich type operator inequalities*, J. Inequal. Appl., **3** (1998), 137-148.
- [35] T. Furuta, *Simplified proof of an order preserving operator inequality*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **74** (1998), 114.
- [36] T. Furuta, *Generalized Aluthge transformation on p -hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 3071-3075.

- [37] T. Furuta, *The Hölder-McCarthy and Young inequalities are equivalent for Hilbert space operators*, Amer. Math. Monthly, **108**(1) (2001), 68-69.
- [38] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85-88.
- [39] T. Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequalities*, Proc. Japan Acad. Ser. A., **65** (1989), 126.
- [40] T. Furuta, *Two operator functions with monotone property*, Proc. Amer. Math. Soc., **111**(1) (1991), 511-516.
- [41] T. Furuta, *An extension of Heinz-Kato theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **120** (1994), 785-787.
- [42] T. Furuta, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179** (1993), 161-169.
- [43] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139-155.
- [44] T. Furuta, *Normal inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Mathematical Physics., **1**(1) (1989), 135-137.
- [45] T. Furuta, *Results under $\log A \geq \log B$ can be derived from ones under $A \geq B \geq 0$ by Uchiyama's methond associaced with Furuta and Kantonvich type operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **3** (2000), 423-436.
- [46] T. Furuta, *The operator equation $T(H^{1/n}T)^n = K$* , Linear Algebra Appl., **109** (1988), 149-152.
- [47] T. Furuta, *Parallelism related to the inequality " $A \geq B \geq 0$ ensures $(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ "*, Math. Japon., **45**(2) (1997), 203-209.
- [48] T. Furuta, *Determinant type generalizations of the Heinz-Kato theorem via Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **120**(1) (1994), 223-231.

- [49] T. Furuta, *Parametric operator function via Furuta inequality*, Sci. Math., 1 (1) (1998), 1-5.
- [50] T. Furuta, *Invitation to Linear Operators — From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space*, Taylor & Francis, London, 2001.
- [51] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several classes*, Sci. Math., 1 (1998), 389-403.
- [52] T. Furuta, T. Yamazaki and M. Yanagida, *Operator functions implying generalized Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., 1 (1998), 123-130.
- [53] T. Furuta, T. Yamazaki and M. Yanagida, *Equivalence relations among Furuta-type inequalities with negative powers*, Sci. Math. 1 (1998), 223-229.
- [54] T. Furuta, T. Yamazaki and M. Yanagida, *On a conjecture related Furuta-type inequalities with negative powers*, Nihonkai Math. J. 9 (1998), 213-218.
- [55] T. Furuta and M. Yanagida, *Further extensions of Aluthge transformation on p -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., 36 (1997), 122-125.
- [56] T. Furuta and M. Yanagida, *On powers of p -hyponormal and log-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., 5 (2000), 367-380.
- [57] T. Furuta and D. Wang, *A decreasing operator function associated with the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 2427-2432.
- [58] T. Furuta and Y. Seo, *An application of generalized Furuta inequality to Kantorovich type inequalities*, Scientiae Mathematicae, 2 (1999), 393-399.
- [59] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1982.
- [60] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann., 123 (1951), 415-438.

- [61] F. Hensen, *An operator inequality*, Math. Ann., **246** (1980), 249-250.
- [62] F. Hensen and G. K. Pedersen, *Jensen's inequality for operators and Löwner theorem*, Math. Ann., **258** (1982), 229-241.
- [63] T. Huruya, *A note on p -hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3617-3624.
- [64] M. Ito, *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation*, SUT J. Math., **35** (1999), 149-165.
- [65] M. Ito, *On some classes of operators by Fujii and Nakamoto related to p -hyponormal and paranormal operators*, Sci. Math., **3** (2000), 319-334.
- [66] M. Ito, *Generalizations of the results on powers of p -hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **6** (2000), 1-15.
- [67] M. Ito and T. Yamazaki, *Relations between two inequalities $(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$ and $(A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}} \leq A^p$ and its applications*, Integr. Equat. Oper. Th., **44** (2002), 442-450.
- [68] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33** (1988), 883-886.
- [69] E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality, II*, Math. Japon., **45** (1997), 15-23.
- [70] T. Kato, *Notes on some inequalities for linear operators*, Math. Ann., **125** (1952), 208-212.
- [71] T. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 883-886.
- [72] 李国平, 蹇明. 算子函数论. 武汉: 武汉大学出版社, 1997.
- [73] 刘培德. 泛函分析基础. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
- [74] K. Löwner, *Über monotone matrixfunktionen*, Math. Z., **38** (1934), 177-216.
- [75] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36** (1) (1972), 309-310.

- [76] S. M. Pale, *A note on p -hyponormal operators for $0 < p < 1$* , Integr. Equat. Oper. Th., **21** (1995), 498-503.
- [77] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [78] J. G. Stampfli, *Hyponormal operators*, Pacific J. Math., **12** (1962), 1453-1458.
- [79] J. G. Stampfli, *Hyponormal operators and spectral density*, Trans. Amer. Math. Soc., **117** (1965), 469-476.
- [80] K. Tanahashi, *Best possibility of Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 141-146.
- [81] K. Tanahashi, *The best possibility for the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (1999), 511-519.
- [82] K. Tanahashi, *The Furuta inequality with negative powers*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (6) (1999), 1683-1692.
- [83] K. Tanahashi, *On log-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **34** (1999), 364-372.
- [84] A. Uchiyama, *Berger-Shaw's theorem for p -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **33** (1999), 221-230.
- [85] M. Uchiyama, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 469-471.
- [86] M. Uchiyama, *An operator inequality related to Jensen's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (11) (2001), 3339-3344.
- [87] M. Uchiyama, *Further extension of the Heinz-Kato-Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (10) (1999), 2899-2904.
- [88] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *On the Riesz idempotent of class A operators*, Math. Inequal. Appl., **5** (2) (2002), 291-298.
- [89] 夏道行. 线性算子谱理论 (I -亚正常算子与半亚正常算子). 北京: 科学出版社, 1983.

- [90] T. Yamazaki, *Extensions of the results on p -hyponormal and log-hyponormal operators by Aluthge and Wang*, SUT J. Math., **35** (1999), 139-148.
- [91] T. Yamazaki, *On powers of class $A(k)$ operators including p -hyponormal and log-hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **3** (2000), 97-104.
- [92] T. Yamazaki, *Parallelism between Aluthge transformation and powers of operators*, Acta. Sci. Math. (Szeged), **67** (2001), 809-820.
- [93] T. Yamazaki, *Characterizations of $\log A \geq \log B$ and normaloid operators via Heinz inequality*, Integr. Equat. Oper. Th., **43** (2002), 237-247.
- [94] T. Yamazaki and M. Yanagida, *A characterization of log-hyponormal operators via p -paranormality*, Sci. Math., **3** (2000), 19-21.
- [95] T. Yamazaki and M. Yanagida, *A further generalization of paranormal operators*, Sci. Math., **3** (2000), 23-31.
- [96] M. Yanagida, *Some applications of Tanahashi's result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 297-305.
- [97] M. Yanagida, *Powers of class $wA(s, t)$ operators associated with generalized Aluthge transformation*, J. Inequal. Appl., **7**(2) (2002), 143-168.
- [98] C. Yang, *An order preserving inequality via Furuta inequality, II* Linear Algebra Appl., **331** (2001), 89-100.
- [99] C. Yang, *An order preserving inequality via Furuta inequality*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **54** (2) (2001), 241-247.
- [100] C. Yang, *On the strong extreme points of the set $N_0(\Delta)$* , Scientiae Mathematicae Japonicae, **54** (2) (2001), 235-239.
- [101] 杨长森. 正算子平均的不等式. 数学杂志, **16** (4) (1996), 467-474.
- [102] C. Yang, *On the Critical points of the map $F_p : X \rightarrow \|AXB - C\|_p^p$* , Applied Mathematics and Mechanics, **21** (4) (2000), 485-488.
- [103] C. Yang, *Powers of an invertible w -hyponormal operator*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, **19** (3) (2004), 288-292.

- [104] C. Yang, Q. Guo and J. Zhao, *A class of power bounded generalized shift*, Acta. Math. Sci., **20(3)** (2000), 423-432.
- [105] 杨长森, 户清文, 左红亮. 具有负指数的 Furuta 型不等式的推广. 数学物理学报, **25(1)** (2005), 21-26.
- [106] 杨长森, 李海英. 关于 p - w -亚正常算子的一个注记. 数学学报, **49(1)** (2006), 19-28.
- [107] C. Yang and H. Li, *Powers of an invertible p - w -hyponormal operator*, Acta. Sci. Math. (Szeged), **71** (2005), 363-370.
- [108] C. Yang and J. Yuan, *Extensions of the results on powers of p -hyponormal and log-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., (2006), Article ID36919, 1-14.
- [109] C. Yang and J. Yuan, *Spectrum of class $wF(p, r, q)$ operators for $p+r \leq 1$ and $q \geq 1$* , Acta. Sci. Math. (Szeged), **71** (2005), 767-779.
- [110] C. Yang and F. Gao, *A characterization of chaotic order*, J. Inequal. Appl., 2006, Article ID79123, 1-6.
- [111] C. Yang and J. Yuan, *Class $wF(p, q, r)$ operators*, Acta Math. Sci. Ser. A, **27(5)** (2007), 769-780.
- [112] C. Yang, H. Zuo. 函数 $F(\alpha) = (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$ 的最优单调区间. 数学学报, **47(1)** (2004), 79-86.
- [113] C. Yang and H. Zuo, *A monotone function via Furuta-type inequality with negative powers*, Math. Inequal. Appl., **6(2)** (2003), 303-308.
- [114] J. Yuan and C. Yang, *Classes of operators associated with Furuta inequality and Aluthge transformation*, **7(1)** (2006), Article 32, 1-9.
- [115] T. Yoshino, *The p -hyponormality of the Aluthge transformation*, Interdiscip. Inform. Sci., **3** (1997), 91-93.
- [116] T. Yoshino, *Introduction to operator theory*, Pitman Research Notes in Math. Ser., **300**, Longman Scientific and Technical, New York, 1993.